Ejercicios de Introducción Estudio de las Funciones

MarioProfe

21 de marzo de 2024

Los números encerrados en cuadritos corresponden al número del Ejercicio que aparece en la hoja de respuestas suministrada

$\boxed{2}$ 1. ¿Para que valores reales de p el punto $A(p-7, \frac{4}{5})$ pertenece al eje de las ordenadas?

$\boxed{3}$ 2. ¿Para que valores reales de k el punto $B(5k+15, 4k^2-36)$ pertenece al eje de las abscisas?

$\boxed{4}$ 3. ¿Para que valores reales de r el punto $C(\frac{2}{3}, r-2)$ pertenece al 1° cuadrante?

$\boxed{5}$ 4. ¿Para que valores reales de m el punto $C(5m-8, m+2)$ pertenece al 2° cuadrante?

$\boxed{6}$ 5. Determine los números reales a y b de modo que $(3a-2b, a+b) = (10, 11)$.

$\boxed{10}$ 6. Un metalúrgico recibe US \$ 12,00 por hora trabajada hasta un limite de 44 horas semanales, siendo aumentado un 30 % en el salario/hora cada hora adicional que exceda el limite.

(a) Complete la siguiente tabla:

Horas semanales trabajadas	**Ganancias por las horas trabajadas (\$)**
20	
32	
44	
46	
50	

(b) El ingreso por las horas trabajadas es una función del número de horas semanales trabajadas ¿Por qué?

(c) Indicando por y el ingreso por x horas de trabajo semanal, con $x \leqslant 44$, elabore una ecuación que exprese y en función de x.

(d) Indicando por y el ingreso por x horas de trabajo semanal, con $x > 44$, elabore una ecuación que exprese y en función de x.

11 7. Un consumidor compró un automóvil por US $ 20.000,00 constatando que, al final de cada año de uso, el valor de mercado del vehículo disminuye en un 90 % del valor de un año atrás. Observe en la tabla a seguir los valores del automóvil hasta finales del 2° año.

Tiempo de uso del automóvil (año)	**Valor de mercado ($)**
0	20,000
1	$0,9 - 20{,}000$
2	$0,9 \cdot 0,9 \cdot 20{,}000 = (0,9)^2 \cdot 20{,}000$

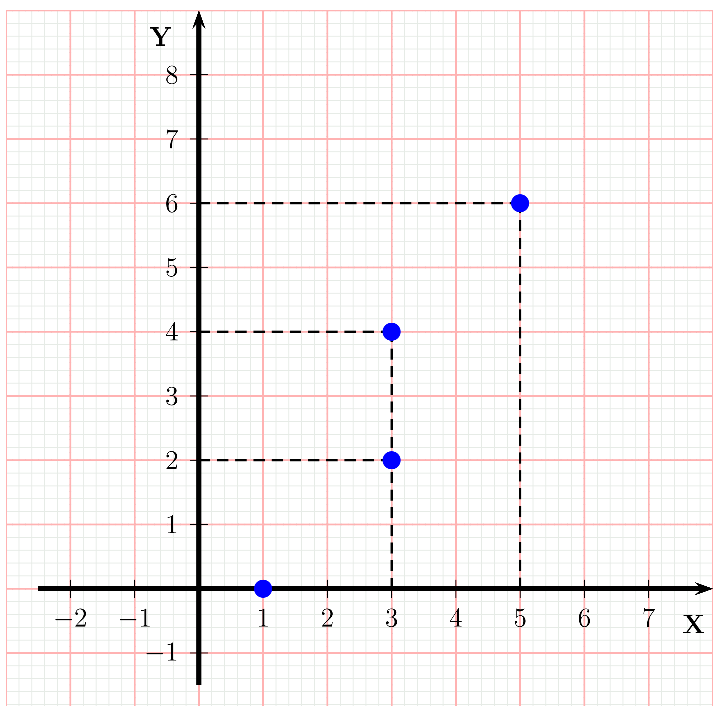
(a) Determine el valor del automóvil al final del 3° año de uso.

(b) Determine el valor del automóvil al final de x años de uso.

(c) Indicando por y el valor de mercado del automóvil con x años de uso, obtenga una ecuación que relacione y y x.

(d) ¿El valor de mercado del automóvil es dado en función del tiempo de uso? ¿Por qué?

16 8. El gráfico abajo representa una relación h de $M = \{1, 3, 5\}$ en $N = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

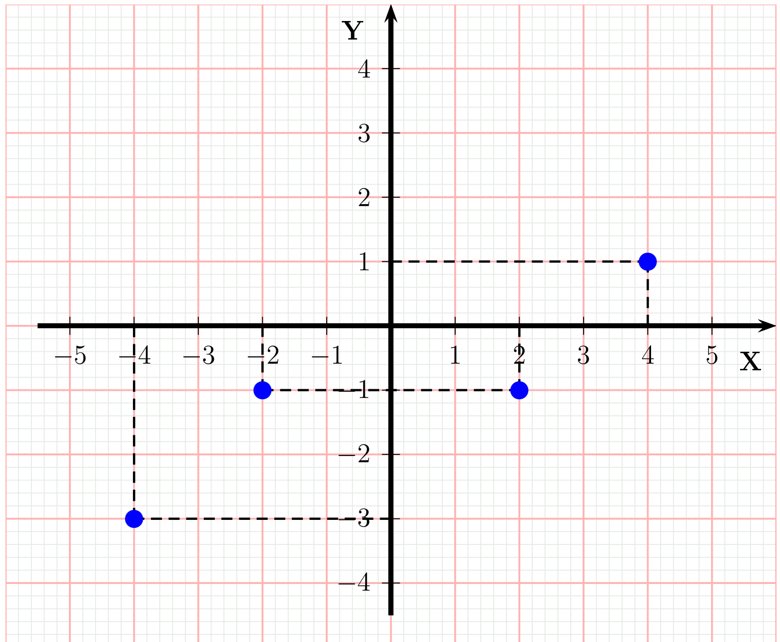


(a) Construir el diagrama de flechas de esa relación.

(b) Determinar el Dominio, el Contradominio y el Conjunto Imagen de esa relación.

(c) ¿Esa relación es una función de M en N? ¿Por qué?

$\boxed{17}$ 9. El gráfico abajo representa una relación s de $P = \{-4, -2, 2, 2\}$ en $Q = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$.

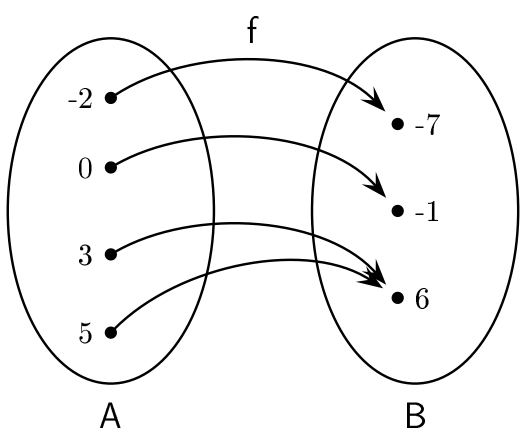


(a) Construir el diagrama de flechas de esa relación.

(b) Determinar el Dominio, el Contradominio y el Conjunto Imagen de esa relación.

(c) ¿Esa relación es una función de P en Q? ¿Por qué?

$\boxed{18}$ 10. El Diagrama señalado abajo representa una función $f : A \to B$.



$\boxed{20}$ 11. Siendo la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$, calcule:

(a) $f(2)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(\frac{1}{4})$ (d) $f(-\frac{1}{4})$

$\boxed{22}$ 12. Considere la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x}$. ¿Qué números del dominio de f poseen como imagen el número 4?

$\boxed{23}$ 13. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$ y $Im(f) = \{2, 0, -\frac{41}{7}\}$. Determine el dominio de A.

$\boxed{24}$ 14. Un hacendado establece el precio de un saco de café, en función de la cantidad de sacos adquiridos por el comprador, usando la ecuación $P(x) = 50 + \dfrac{200}{x}$, en la cual P es el precio del saco en Dólares y x el número de sacos vendidos.

(a) ¿Cuanto debe pagar, por saco, un comprador que adquiere 100 sacos?

(b) ¿Cuanto debe pagar, por saco, un comprador que adquiere 200 sacos?

(c) Sabiendo que un comprador pagó 54 Dólares por saco, ¿Cuantos sacos el compró?

$\boxed{26}$ 15. Una función satisface la relación $f(2x) = 2f(x) + f(2)$ para cualquier valor real de x. Sabiendo que $f(4) = 6$, calcule $f(16)$.

$\boxed{28}$ 16. Un laboratorio probó la acción de una droga en un muestra de 720 pollos. Se constató que la ley de sobrevivencia de un lote de pollos era dada por la relación $v(t) = at^2 + b$, en la que $v(t)$ es el número de elementos vivos en el tiempo t (meses). Sabiendo que el último pollo murió cuando $t = 12$ meses después del inicio del experimento, la cantidad de pollos que todavía están vivos en el 10° mes era:

(a) 80 (b) 100 (c) 120 (d) 220 (e) 300

$\boxed{29}$ 17. Determine el dominio de cada una de las funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(c) $f(x) = 3x + 5$

(d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 9}$

(e) $f(x) = 15$

(f) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 36} + \sqrt{x - 2}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$\boxed{30}$ 18. ¿El número 5 pertenece al dominio de $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-5}}$? ¿Por qué?

$\boxed{33}$ 19. En una función $y = f(x)$ decimos que x y y son directamente proporcionales sí, y solamente sí, para cualquier $(x, y) \in f$, tenemos:

1. Se $x = 0$, entonces $y = 0$
2. Se $x \neq 0$, entonces $\dfrac{y}{x} = k$, en que k es una constante real.

Por ejemplo, en la función $y = 2x$ las variables x y y son directamente proporcionales, pues para cualquier $(x, y) \in f$ tenemos:

1. Si $x = 0$, entonces $y = 2 \cdot 0 = 0$.
2. Si $x \neq 0$, $\dfrac{y}{x} = 2$.

¿En cuales de las funciones abajo las variables x y y son directamente proporcionales?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{x}{3}$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x + 3$

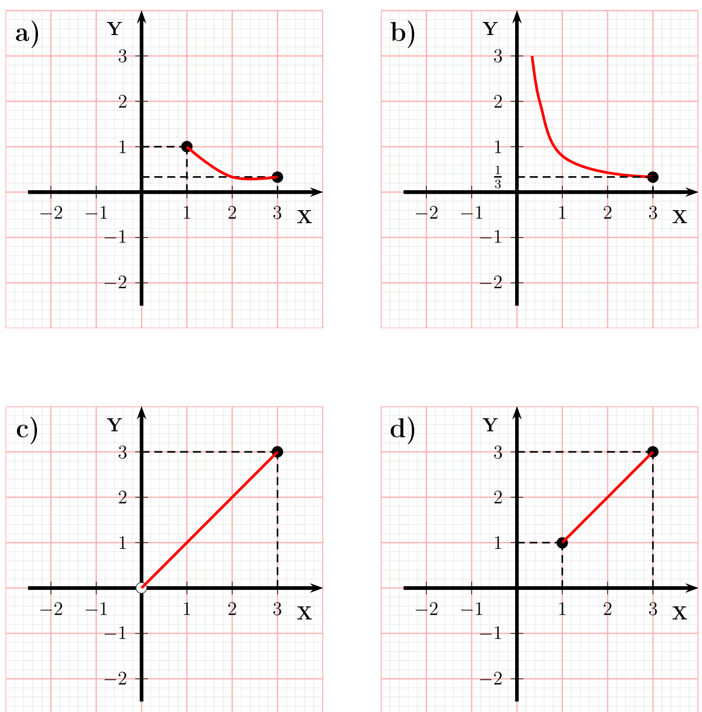
(d) $s : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = 4x$

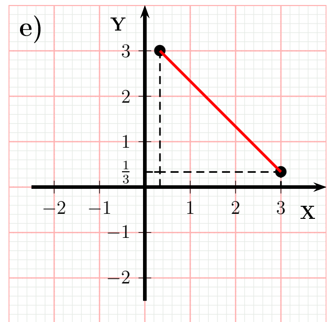
(e) $t : [1, 10] \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = \dfrac{x}{5}$

(f) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = x^2$

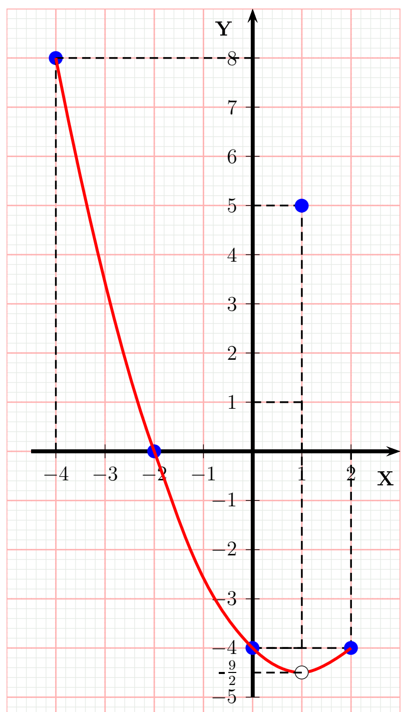
(g) $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $v(x) = 0$

$\boxed{37}$ 20. La presión p ejercida por una fuerza de intensidad f sobre un área A es calculada por $\dfrac{F}{A}$. Si la fuerza tuviese una intensidad constante de 1 unidad y el área varía en el intervalo $]0, 3]$, el gráfico de p en función de A es:





$\boxed{38}$ 21. El gráfico abajo representa la función: $f : [-4, 2] \to] -\frac{9}{2}, 8]$.



Calcule:

(a) $f(-4)$

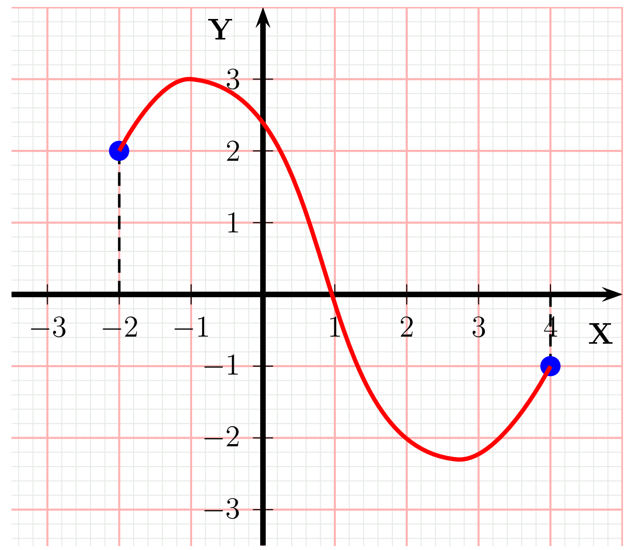
(b) $f(-2)$

(c) $f(0)$

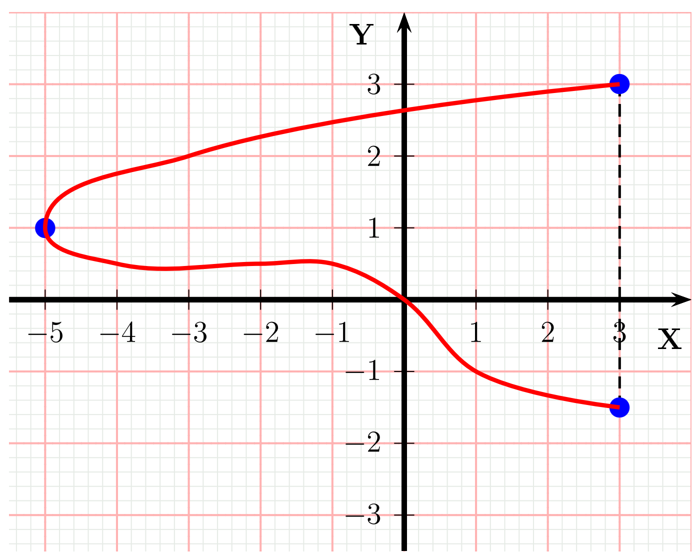
(d) $f(1)$

(e) $f(3)$

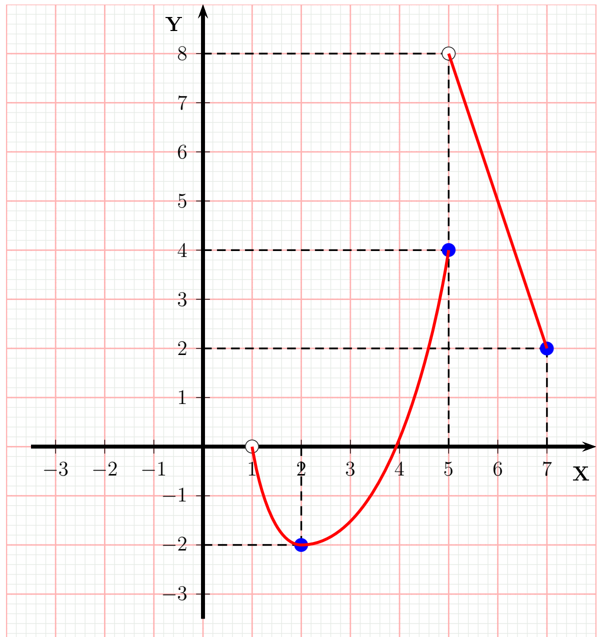
$\boxed{39}$ 22. Verifique si el gráfico abajo representa una función de $A = [-2, 4]$ en $\mathbb{R}$.



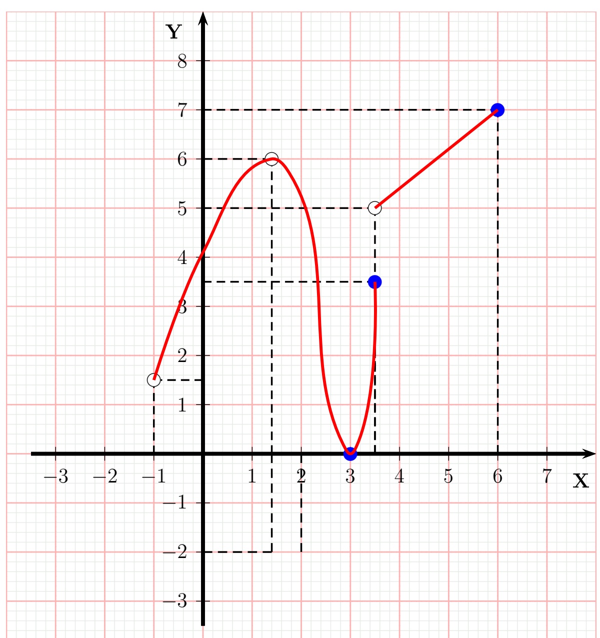
$\boxed{40}$ 23. El gráfico a seguir representa una función g de $A = [-5, 3]$ en $\mathbb{R}$. ¿Por qué?



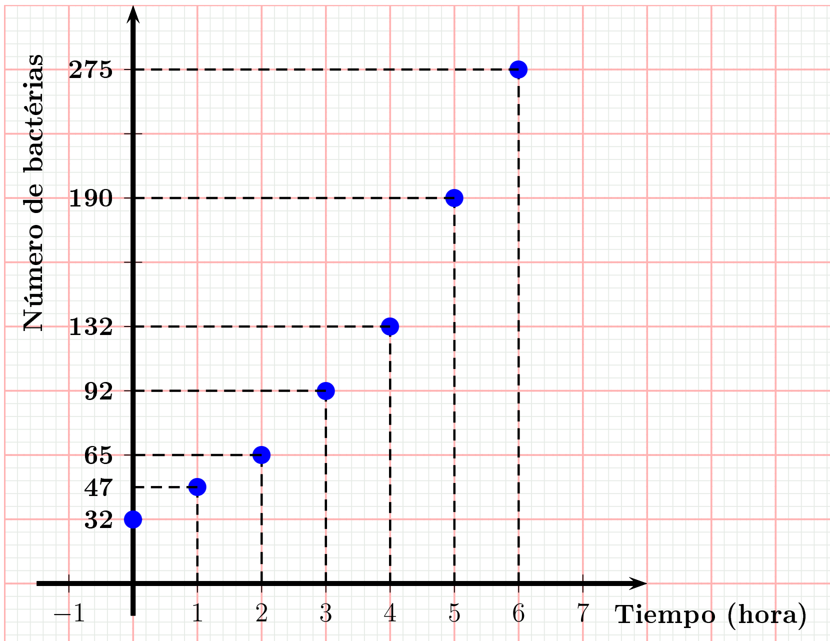
41 24. Determine el dominio y el conjunto imagen de la función f representada a seguir.



42 25. El gráfico a seguir representa una función f. Determine el dominio y el conjunto imagen de esa función.



$\boxed{44}$ 26. Un biólogo, al estudiar un cultivo de bacterias, las contó en un determinado instante, al cual llamó de instante cero. Al final de cada una de las seis horas siguientes, realizó un nuevo conteo de las bacterias. Los resultados de esa experiencia están descritos en el siguiente gráfico.



(a) ¿Cual era el número de bacterias en el inicio del conteo, es decir, en el instante cero?

(b) ¿En cuanto aumentó el número de bacterias de la quinta para la sexta hora?

(c) ¿En cuanto aumentó el número de bacterias de la tercera para la quinta hora?

(d) ¿El número de bacterias es función del tiempo? ¿Por qué?.

(e) Estime el número de bacterias en el instante 5h 12min después del inicio del conteo.

$\boxed{45}$ 27. Determine las raíces de cada una de las funciones reales de variable real.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(b) $y = 5x + 3$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

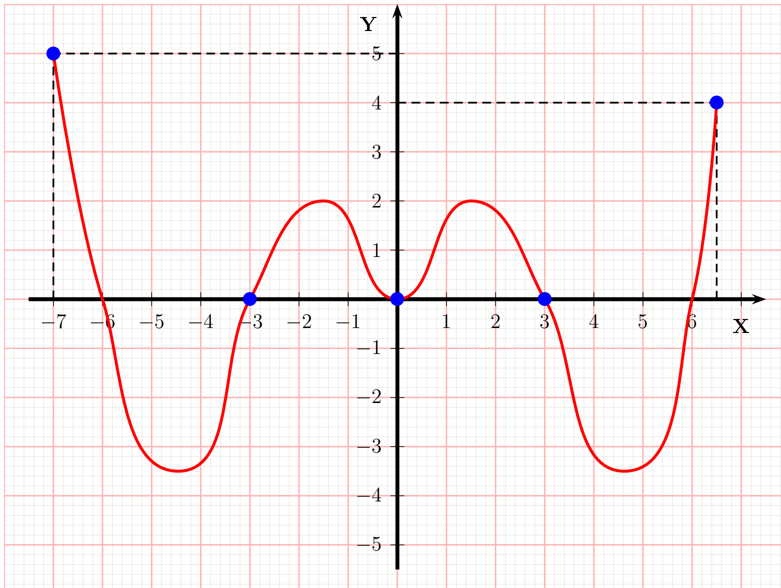
(d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

(e) $y = x^2 + 1$

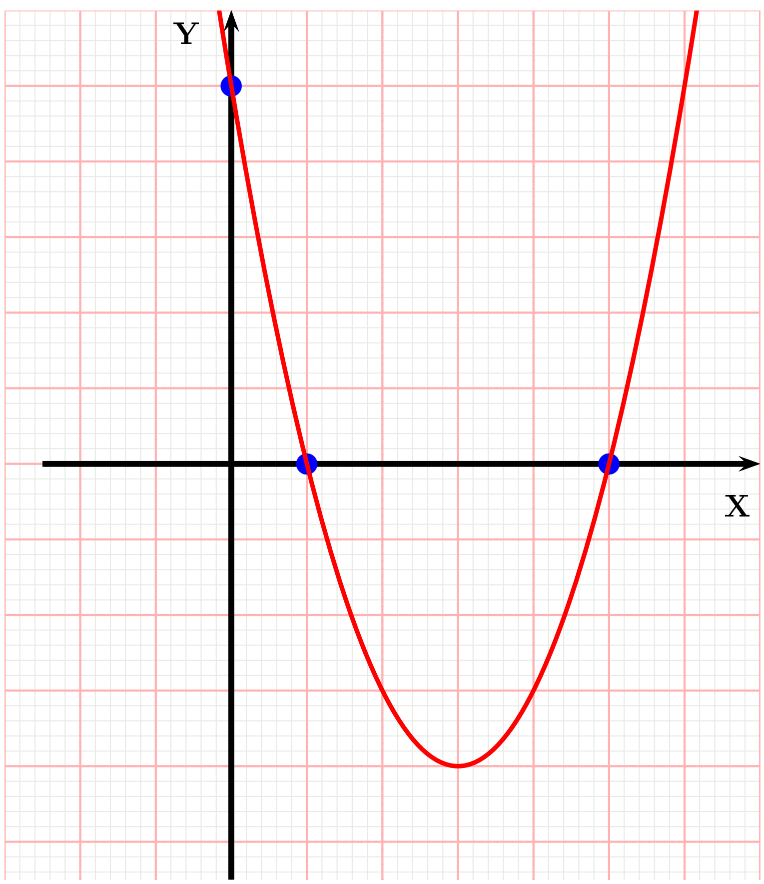
(f) $z(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

(g) $y = -3$

46 28. Determine las raíces de la función f cuyo gráfico es dado abajo.



47 29. El gráfico abajo representa la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$.



Determine:

(a) Las abscisas de los puntos donde el gráfico intercepta el eje Ox;

(b) La ordenada del punto donde el gráfico intercepta el eje Oy;

(c) Las raíces de f.

$\boxed{49}$ 30. La trayectoria de una pelota de fútbol, chutada a partir de un determinado punto del campo, puede ser descrita por la función $h(t) = 3t - t^2$, en que $h(t)$ representa la altura de la pelota, en metros, en relación al campo, y t representa el tiempo, en segundos, desde el instante del chute hasta el instante en que la pelota alcanza nuevamente el suelo.

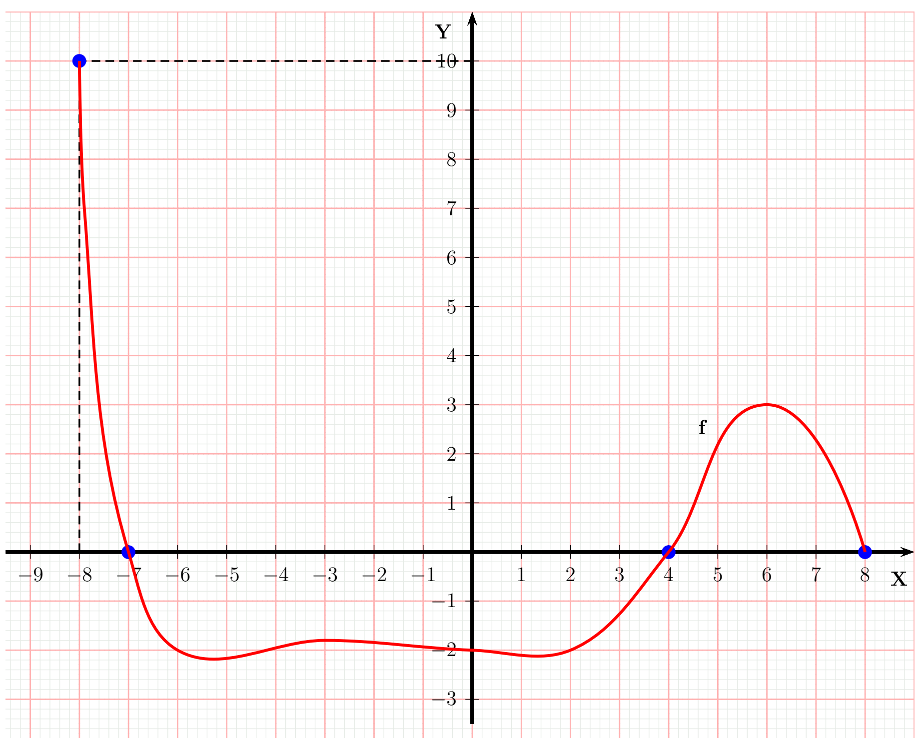
(a) En el contexto de este problema, ¿Cuales son las raíces de la función h?

(b) ¿Cual es la interpretación física de las raíces de la función h?

(c) ¿Cual era la altura de la pelota, en relación al campo 1,5 segundos después del chute?

(d) ¿En la trayectoria descrita por la función h, la pelota alcanzó 4 mt de altura en relación al campo? Justifique su respuesta.

$\boxed{51}$ 31. El gráfico abajo representa una función f de $[-8, 8]$ en $\mathbb{R}$.



Clasifique cada afirmación a seguir como verdadera (V) o falsa (F).

(a) $f(-8) > f(5)$

(b) $f(0) > 0$

(c) $f(-7) = 0$

(d) $f(4) > 0$

(e) $f(2) < 0$

(f) $f(-\frac{15}{2}) < 0$

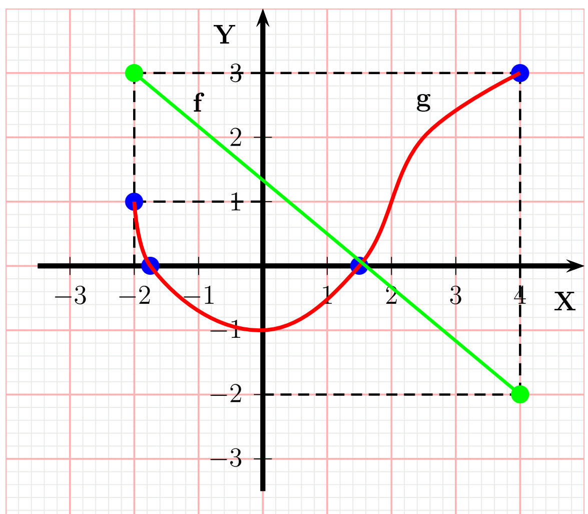
(g) Si $4 < x < 8$, entonces $f(x) > 0$

(h) Si $4 \leqslant x \leqslant 8$, entonces $f(x) > 0$

(i) Si $-7 < x < 4$, entonces $f(x) < 0$

(j) Si $f(x) > 0$, entonces $-8 \leqslant x < -7$ o $4 < x < 8$.

52 32. En el plano cartesiano abajo, están representados los gráficos de dos funciones, f y g, de dominio $[-2, 4]$ y contradominio $\mathbb{R}$.



Clasifique como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

(a) $f(3) > 0$

(b) $f(2) < 0$

(c) $f(1) > 0$

(d) $f(-1) > 0$

(e) $f(0) < 0$

(f) $g(3) > 0$

(g) $g(2) > 0$

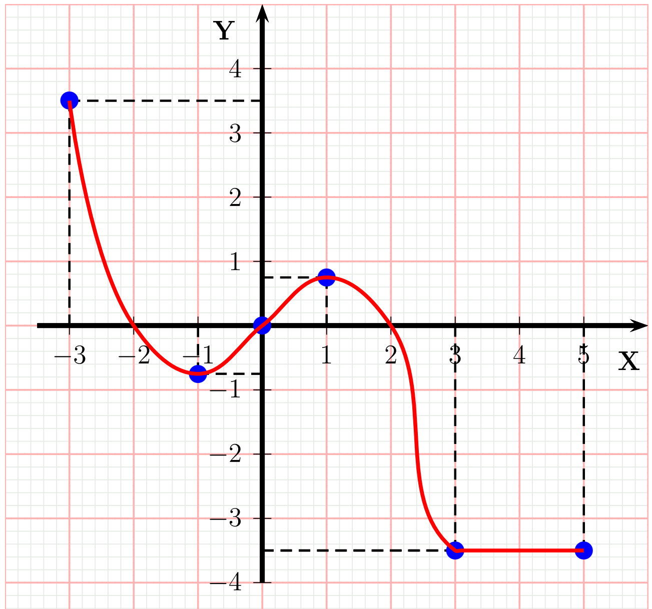
(h) $g(0) > 0$

(i) $f(\frac{3}{2}) = g(-\frac{7}{4})$

(j) $f(3) \cdot G(3) < 0$

(k) $f(\frac{18}{10}) \cdot g(\frac{18}{10}) < 0$

$\boxed{53}$ 33. Una función f representada por el gráfico abajo.

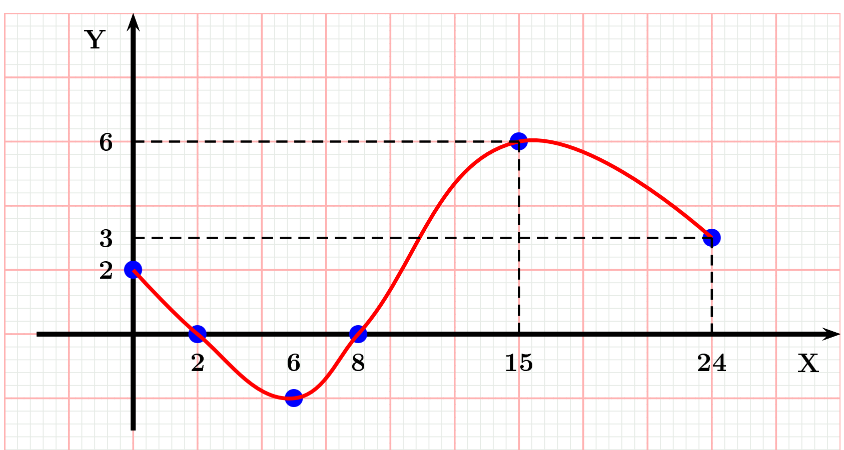


(a) ¿En que intervalo(s) del dominio la función f es creciente?

(b) ¿En que intervalo(s) del dominio la función f es decreciente?

(c) ¿En que intervalo(s) del dominio la función f es constante?

$\boxed{56}$ 34. El gráfico abajo representa la temperatura y, en grados Celsius, en una región, en función del tiempo x, en horas, a lo largo de las 24 horas de un día de invierno.



Determine los intervalos de tiempo en que:

(a) La temperatura fue creciente.

(b) La temperatura fue decreciente.

58 35. Usando la definición de función decreciente, muestre que la función $y = 5 - 2x$ es decreciente en todo su dominio.

59 36. En un trecho de una carretera, la velocidad v de un camión, en kilómetros por hora, en función del tiempo t, en horas, puede ser calculada por medio de la función $v(t) = 6t+60$.

(a) Durante ese trecho, sean t_1 y t_2 dos valores cualquiera del tiempo, en horas. Muestre que si $t_1 > t_2$, entonces $v(t_1) > v(t_2)$.

(b) De acuerdo con lo que Ud. demostró en el item a, es posible concluir que el camión estuvo en movimiento acelerado o retardado? (El movimiento es acelerado o retardado conforme la velocidad v del camión sea creciente o decreciente).

60 37. Durante cierto período, el volumen v, en litros, de agua contenida en una piscina varió en función del tiempo t, en horas, de acuerdo con la función $v(t) = 90\,000 - 10t$.

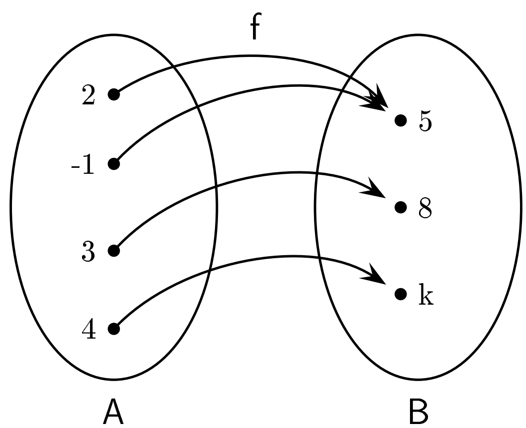
(a) En el período considerado, sean t_1 y t_2, dos valores cualquiera del tiempo, en horas. Muestre que si $t_1 > t_2$, entonces $v(t_1) < v(t_2)$.

(b) De acuerdo con lo que Ud. demostró en el item a, es posible concluir que la piscina estaba siendo llenada o vaciada, en el período considerado.

Ejercicios Complementarios:

$\boxed{5}$ 38. El Diagrama abajo representa una función $f : A \to B$, siendo k una constante real. Determine el número k, sabiendo que:

$$\frac{f(2)}{f(4) - f(3)} = f(-1).$$



$\boxed{6}$ 39. Siendo la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^2 - x$, determine:

(a) El elemento del contradominio de f que es la imagen del número 5.

(b) El o los elemento(s) x del dominio de f que poseen como imagen el número 2.

$\boxed{8}$ 40. Obtenga el conjunto de los valores reales de x para los cuales está definida cada función a seguir (otra manera de pedir el dominio de una función).

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x^4 - 5x^2 + 4}$

(b) $y = \dfrac{5}{x^4 - 16} + \sqrt{1 - x}$

(c) $u(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1}$

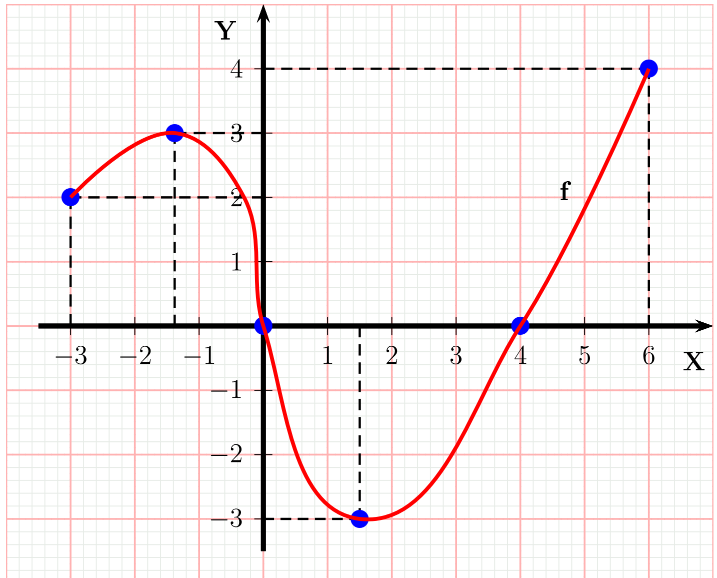
(d) $v(x) = \dfrac{7}{x^2 - 3} - \sqrt{5 - 2x}$

$\boxed{14}$ 41. Esboce el gráfico de cada función.

(a) $h(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(b) $s(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

$\boxed{15}$ 42. La figura abajo es el gráfico de una función f.



Clasifique cada una de las afirmaciones a continuación como verdadera (V) o falsa (F).

(a) $(\frac{3}{2}, -3) \in f$

(b) El punto de f de abscisas 4 es el punto $(4, 0)$.

(c) El punto de f de abscisas -2 tiene la ordenada menor que 2.

(d) Existe apenas un punto de f con ordenada -3.

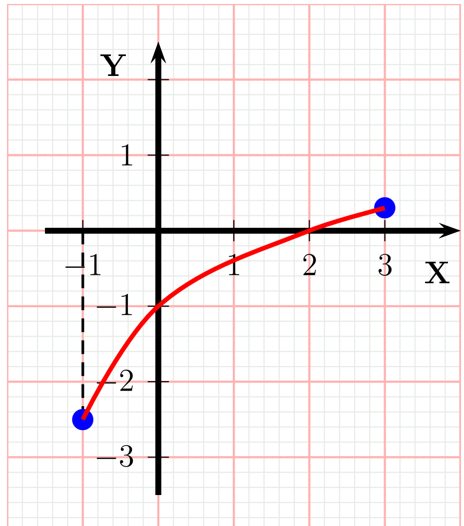
(e) Existe apenas un punto de f con ordenada 3.

(f) Existen exactamente tres puntos de f con ordenada 2.

$\boxed{16}$ 43. Sea f, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, una función definida por $f(x) = mx + p$, en que m y p son constantes reales. Si los puntos $(-2, 7)$ y $(2, -1)$ pertenecen al gráfico de f, entonces $m - p$ es igual a:

(a) -6 (b) -5 (c) -3 (d) 1 (e) 6

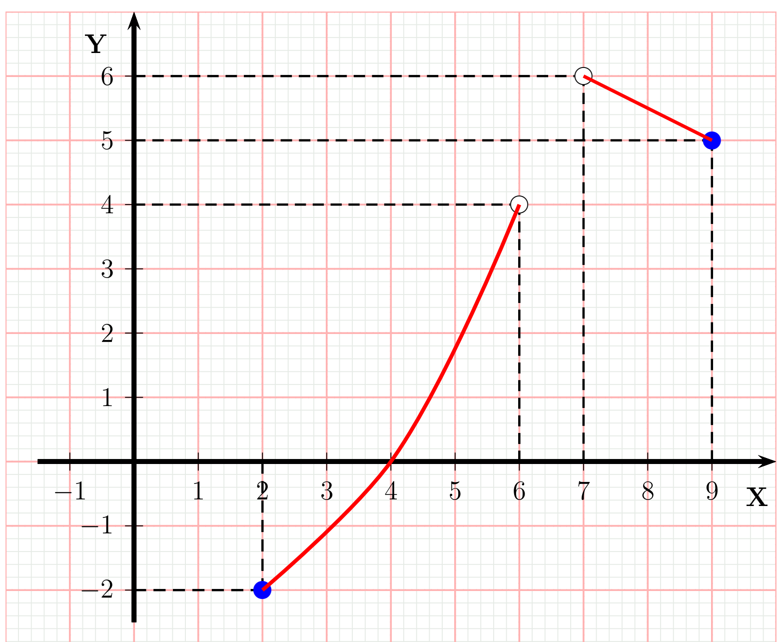
$\boxed{17}$ 44. La figura a continuación representa el gráfico de una función de la forma $f(x) = \dfrac{x+a}{x+b}$, para $-1 \leqslant x \leqslant 3$.



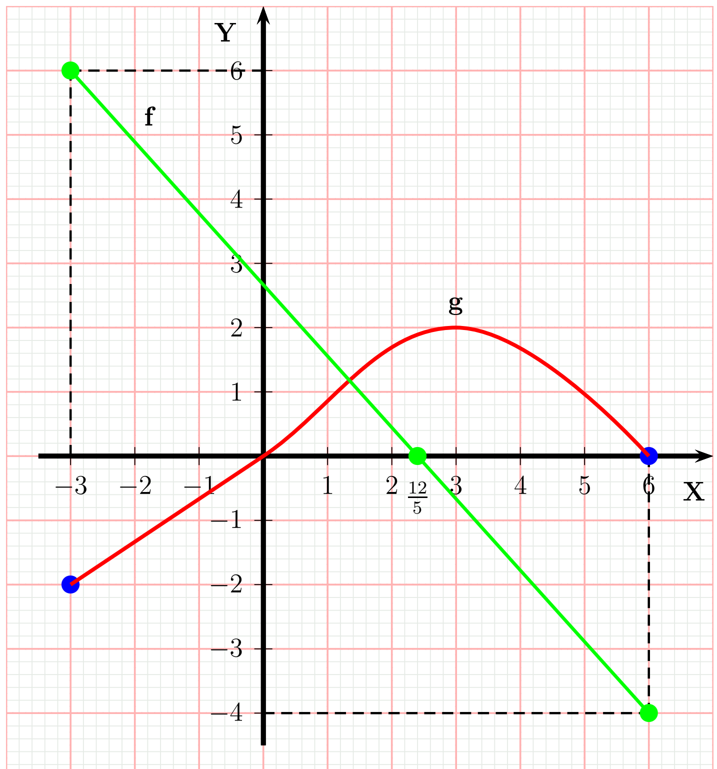
(a) Determine los valores de a y b.

(b) Calcule $f(-3) - f(-1)$.

$\boxed{19}$ 45. Determine el dominio y el conjunto imagen de la función f representada a continuación.



$\boxed{23}$ 46. En el plano cartesiano a continuación, están representadas dos funciones, f y g, de dominio $[-3, 6]$ y contradominio $\mathbb{R}$.



Determine los valores de x tal que:

(a) $f(x) = 0$

(b) $g(x) = 0$

(c) $f(x) > 0$

(d) $f(x) < 0$

(e) $g(x) > 0$

(f) $g(x) < 0$

(g) $f(x) \cdot g(x) < 0$

(h) $\dfrac{f(x)}{g(x) > 0}$