

Ejercicios de Circunferencia Trigonométrica

MarioProfe

4 de mayo de 2024

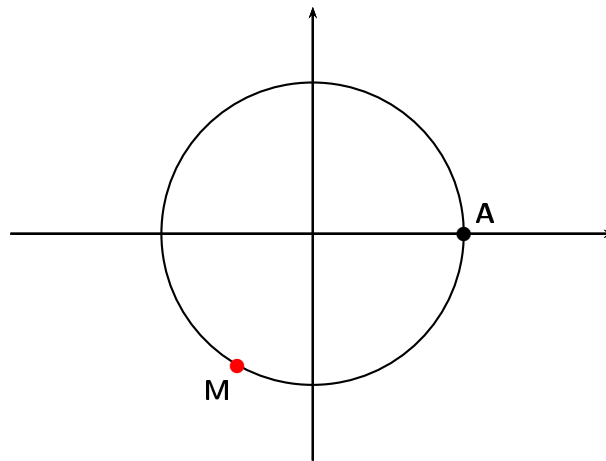
Los números encerrados en cuadritos corresponden al número del Ejercicio que aparece en la hoja de respuestas suministrada

Radianes

- 01** 1. Calcule la medida, en radianes, de un arco de 10 cm contenido en una circunferencia con 2,5 cm de radio.
- 02** 2. Un punto P de la superficie terrestre está localizado a $\frac{\pi}{7}$ rad de latitud norte. Considerando que el radio de la Tierra mide 6.370 Km, el menor arco que une el punto P a la línea del ecuador tiene una longitud igual a:
- (a) 750π Km (c) 450π Km (e) 597π km
(b) 910π Km (d) 623π Km
- (Nota: La Latitud de un punto de la superficie terrestre es la medida del menor arco de circunferencia que liga ese punto a la línea del ecuador).
- 03** 3. En el reloj de la torre de una iglesia, el puntero mayor mide 2 m.
¿En cuanto tiempo la punta móvil de ese puntero recorre 5π metros?
- (a) 1 hora y 15 minutos (c) 1 hora (e) 45 minutos
(b) 1 hora y media (d) 30 minutos
- 05** 4. Determine la medida, en grados, equivalente a:
- (a) $\frac{\pi}{4}$ rad (c) $\frac{7\pi}{6}$ rad (e) $\frac{5\pi}{3}$ rad
(b) $\frac{3\pi}{2}$ rad (d) $\frac{2\pi}{5}$ rad

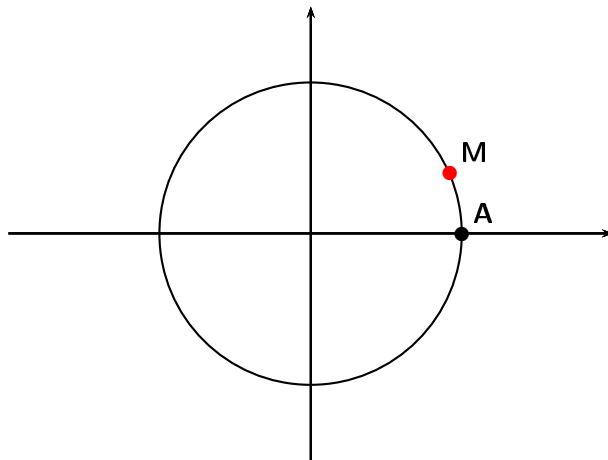
Circunferencia Trigonométrica

- 07 5. La medida de un arco trigonométrico \widehat{AM} es 50° . Determine todas las medidas x asociadas a la extremidad M , bajo cada una de las siguientes condiciones:
- (a) $0^\circ \leq x < 1.080^\circ$ (b) $-720^\circ \leq x < 0^\circ$
- 08 6. La medida de un arco trigonométrico \widehat{AM} es $\frac{6\pi}{7}$ rad. Encuentre todas las medidas x asociadas a la extremidad M , bajo cada una de las siguientes condiciones:
- (a) $0^\circ \leq x < 6\pi$ (b) $-4\pi \leq x < 0^\circ$
- 09 7. Calcule la medida del arco trigonométrico, de la 1ª vuelta positiva, congruente al arco de medida:
- (a) 2.923° (c) -40° (e) $\frac{45\pi}{11}$ rad (g) $-\frac{\pi}{13}$ rad
(b) 1.972° (d) -400° (f) $\frac{38\pi}{5}$ rad (h) $-\frac{18\pi}{5}$ rad
- 10 8. El punto M , representado abajo, es la extremidad de un arco trigonométrico de 2.040° . Determine la medida x asociada al punto M .



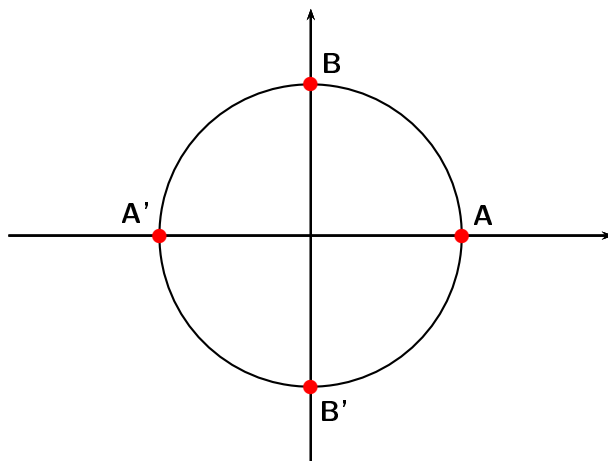
- (a) Con $0^\circ \leq x < 360^\circ$, esto es, en la 1ª vuelta de sentido positivo.
(b) Con $360^\circ \leq x < 720^\circ$, esto es, en la 2ª vuelta de sentido positivo.
(c) Con $720^\circ \leq x < 1.080^\circ$, esto es, en la 3ª vuelta de sentido positivo.
(d) Con $-360^\circ \leq x < 0^\circ$, esto es, en la 1ª vuelta de sentido negativo.

- 11 9. El punto M , representado abajo, es la extremidad de un arco trigonométrico de $\frac{121\pi}{6}$ rad.



Encuentre la medida x asociada al punto M :

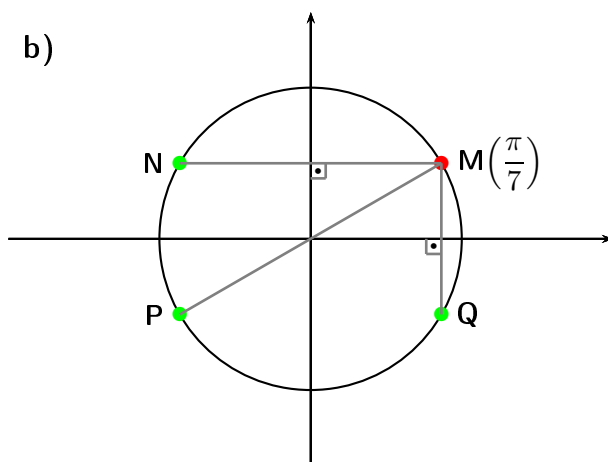
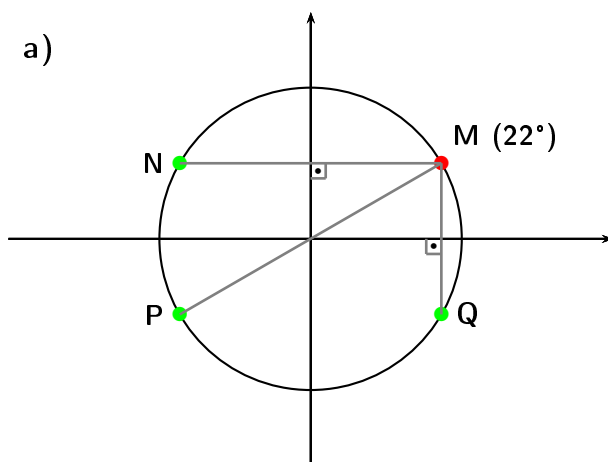
- (a) Con $x \in [0, 2\pi[$ (c) Con $x \in [4\pi, 6\pi[$
(b) Con $x \in [2\pi, 4\pi[$ (d) Con $x \in [-2\pi, 0[$
- 13 10. La circunferencia trigonométrica abajo está dividida en cuatro arcos congruentes por los puntos A , B , A' y B' .



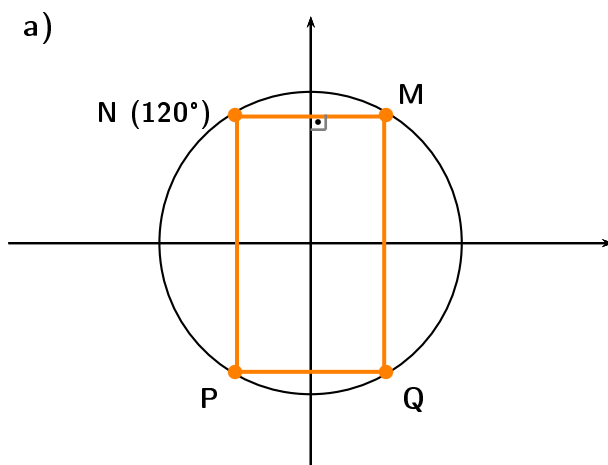
Obtenga:

- (a) Una expresión que represente todos los números reales asociados al punto A' ;
(b) Una expresión que represente todos los números reales asociados al punto B ;
(c) Una expresión que represente todos los números reales asociados al punto B o B' ;
(d) Una expresión que represente todos los números reales asociados al punto A , B , A' o B' .

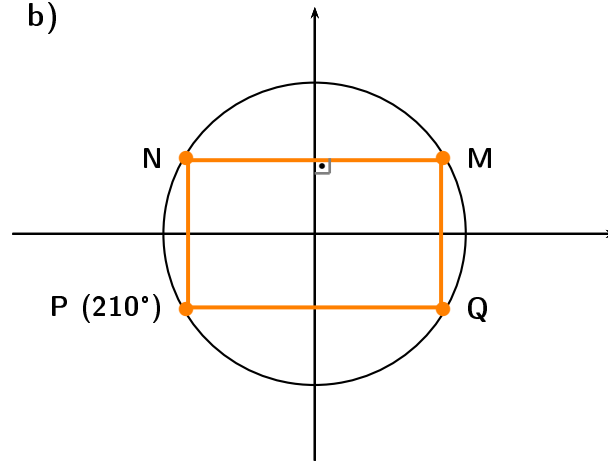
- 16) 11. En cada uno de los ítems abajo, encuentre las medidas asociadas a los puntos N , P y Q en la 1ª vuelta positiva de la circunferencia trigonométrica.



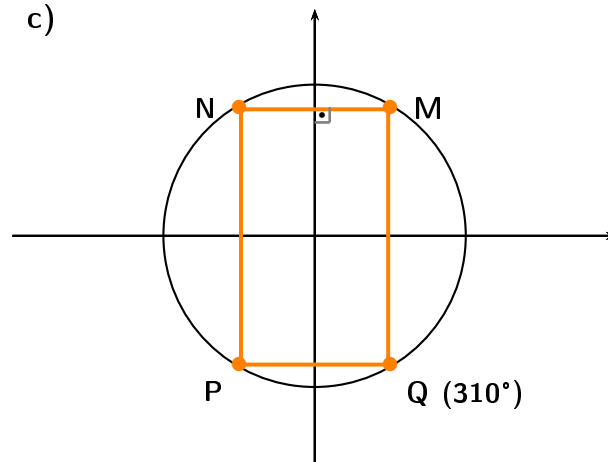
- 17) 12. Determine las medidas asociadas a los vértices de los rectángulos inscritos en las circunferencias trigonométricas en la 1ª vuelta positiva.



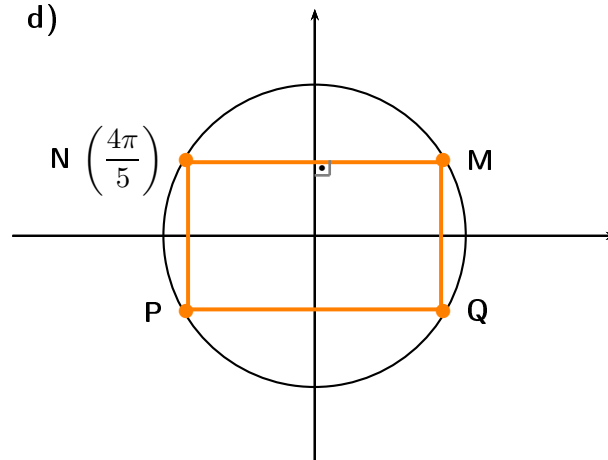
b)



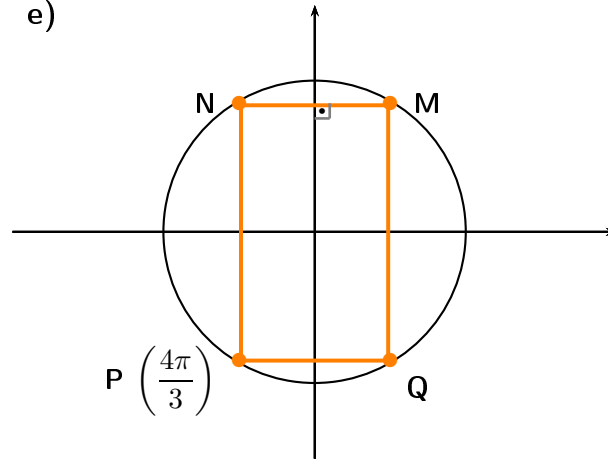
c)



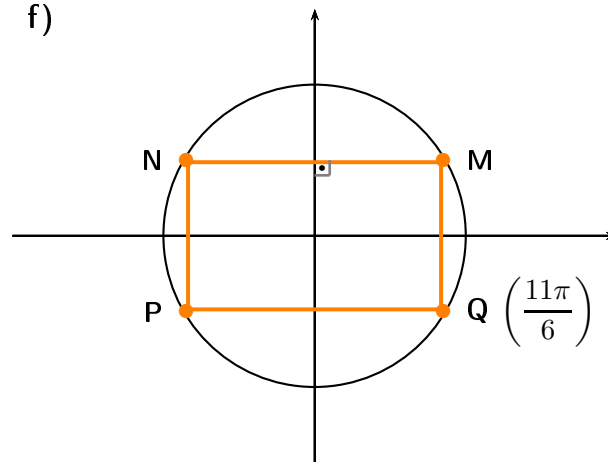
d)



e)

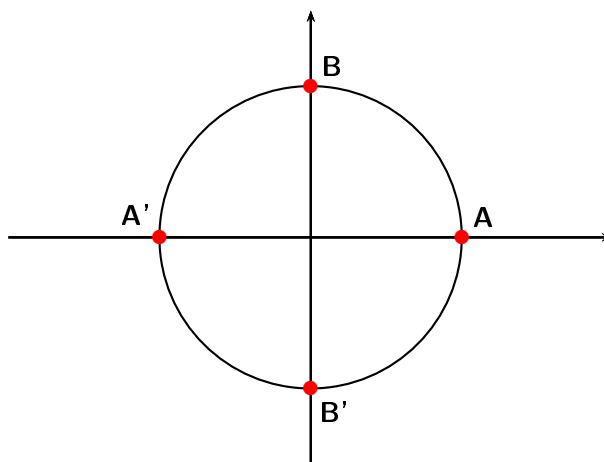


f)



Seno y Coseno de un Arco Trigonométrico

- 19 13. La figura abajo representa la circunferencia trigonométrica.



Calcule:

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $\cos 0$ | (l) $\text{sen } 450^\circ$ |
| (b) $\text{sen } 0$ | (m) $\text{sen } 990^\circ$ |
| (c) $\cos \frac{\pi}{2}$ | (n) $\cos 810^\circ$ |
| (d) $\text{sen } \frac{\pi}{2}$ | (ñ) $\text{sen}(-270^\circ)$ |
| (e) $\cos \pi$ | (o) $\cos(-180^\circ)$ |
| (f) $\text{sen } \pi$ | (p) $\cos 12\pi$ |
| (g) $\cos \frac{3\pi}{2}$ | (q) $\cos 11\pi$ |
| (h) $\text{sen } \frac{3\pi}{2}$ | (r) $\text{sen } \frac{21\pi}{2}$ |
| (i) $\cos 2\pi$ | (s) $\text{sen } \frac{23\pi}{2}$ |
| (j) $\text{sen } 2\pi$ | (t) $\text{sen}(-\pi)$ |
| (k) $\cos 720^\circ$ | (u) $\cos(-3\pi)$ |

- 20 14. Calcule el valor numérico de la siguiente expresión:

$$E = \frac{\text{sen } x - \cos 2x + \cos 3x}{\text{sen } 3x - \cos x} \text{ para } x = 90^\circ$$

21 15. Siendo la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$, calcule:

- (a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- (b) $f(\pi)$
- (c) $\frac{f(0) + f(2\pi)}{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

22 16. Calcule el valor numérico de la siguiente expresión:

$$E = \frac{\operatorname{sen} x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 3x} \text{ para } x = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

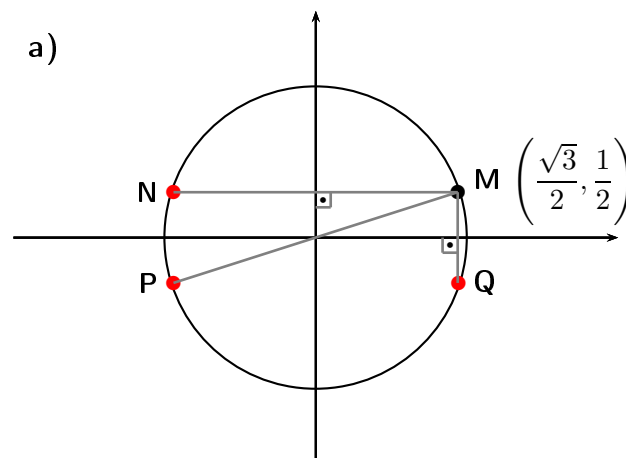
24 17. Señale la opción verdadera:

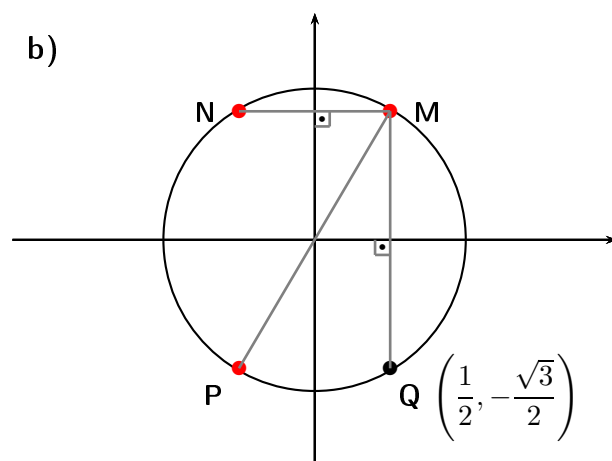
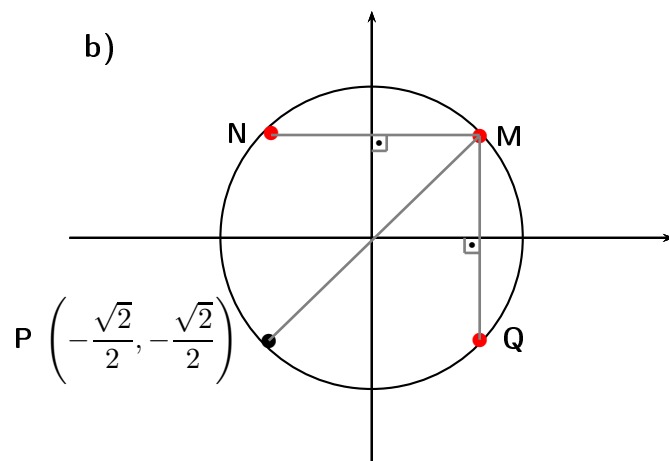
- (a) $\operatorname{sen} 17^\circ < \cos 74^\circ$
- (b) $\operatorname{sen} 74^\circ < \cos 17^\circ$
- (c) $\cos 37^\circ = \cos 143^\circ$
- (d) $\operatorname{sen} 31^\circ > \operatorname{sen} 150^\circ$

27 18. Consultando una Tabla Trigonométrica, calcule:

- (a) $\operatorname{sen} 120^\circ$
- (b) $\cos 120^\circ$
- (c) $\operatorname{sen} 210^\circ$
- (d) $\cos 210^\circ$
- (e) $\operatorname{sen} 300^\circ$
- (f) $\cos 300^\circ$

28 19. En cada uno de los ítems a seguir, determine las coordenadas de los puntos señalados.





29] 20. Consultando el ejercicio anterior, calcule:

(a) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$

(f) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$

(b) $\cos \frac{2\pi}{3}$

(g) $\cos \frac{3\pi}{4}$

(c) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$

(h) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}$

(d) $\cos \frac{7\pi}{6}$

(i) $\cos \frac{5\pi}{4}$

(e) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}$

(j) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}$

30] 21. Calcule el valor de:

(a) $\operatorname{sen}(-30^\circ)$

(d) $\cos(-300^\circ)$

(g) $\operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$

(b) $\cos(-30^\circ)$

(e) $\operatorname{sen}(-1.485^\circ)$

(h) $\cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right)$

(c) $\operatorname{sen}(-300^\circ)$

(f) $\operatorname{sen}(-1.230^\circ)$

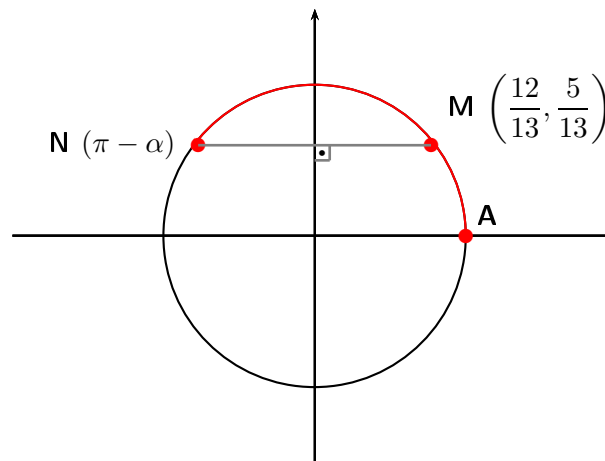
$$(i) \operatorname{sen} \left(-\frac{11\pi}{6} \right) \quad (k) \operatorname{cos} \left(-\frac{7\pi}{4} \right) \quad (m) \operatorname{sen} \left(\frac{33\pi}{4} \right)$$

$$(j) \operatorname{cos} \left(-\frac{5\pi}{3} \right) \quad (l) \operatorname{sen} \left(\frac{25\pi}{6} \right)$$

31] 22. Simplifique la siguiente expresión:

$$E = \frac{\operatorname{cos}(180^\circ + x) + \operatorname{sen}(180^\circ + x) + \operatorname{sen}(180^\circ - x)}{\operatorname{cos}(360^\circ - x)} \text{ con } \operatorname{cos} x \neq 0.$$

32] 23. En la circunferencia trigonométrica abajo, las coordenadas del punto M son $\frac{12}{13}$ y $\frac{5}{13}$, y la medida del arco \widehat{AN} en la 1ª vuelta positiva es $\pi - \alpha$.

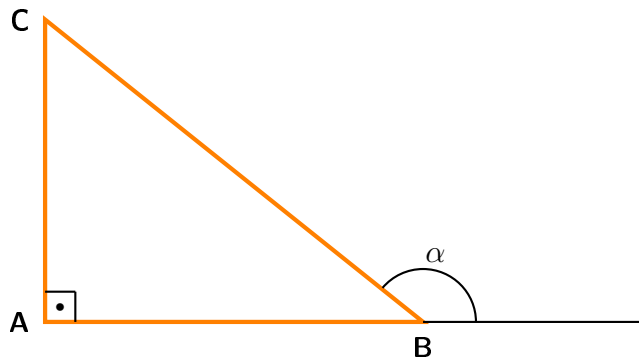


Calcule:

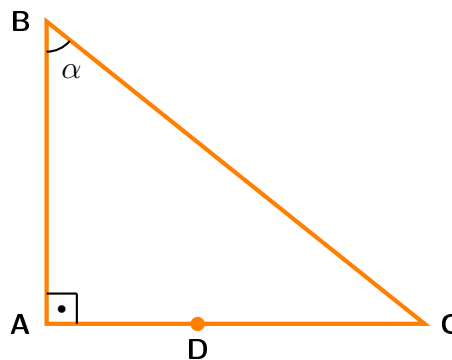
$$(a) \operatorname{sen} \alpha \quad (c) \operatorname{cos}(\pi + \alpha) \quad (e) \operatorname{cos}(2\pi - \alpha)$$

$$(b) \operatorname{cos} \alpha \quad (d) \operatorname{sen}(-\alpha)$$

- 33] 24. Calcule la medida del cateto \overline{AB} del triángulo rectángulo ABC , abajo, sabiendo que $BC = 12$ cm y que $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$



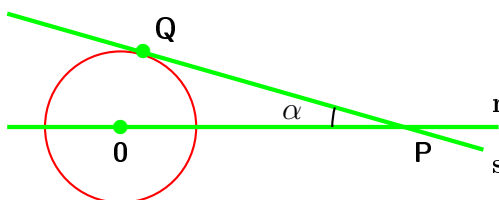
- 34] 25. Una rampa recta y plana, de 8 m de largo, une dos pisos de un garaje y forma un ángulo obtuso de medida α con el piso plano y horizontal de la parte inferior del garaje, tal que $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$. Calcule la altura del piso superior en relación al inferior.
- 35] 26. Dado que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule el valor de $\cos \alpha$.
- 37] 27. Determine $\sin \beta$ y $\cos \beta$ sabiendo que $\sin \beta = 2 \cos \beta$ y $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.
- 39] 28. En el siguiente triángulo rectángulo ABC , la hipotenusa \overline{BC} mide 51 cm, $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ y la distancia del punto D al vértice C es 30,6 cm. Calcule la distancia del punto D a la hipotenusa \overline{BC} .



- 40] 29. Dado que $3 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$ y $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine el valor de $\sin x$.
(Sugerencia: Substituya $\cos x$ por y).
- 41] 30. Determine el valor de $\cos x$ sabiendo que $4 \cos^2 x + 9 \sin x - 6 = 0$.
(Sugerencia: Substituya $\cos^2 x$ por $1 - \sin^2 x$).
- 42] 31. La expresión $1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ es equivalente a:
(a) $\cos^2 x$ (b) $2 \cos^2 x$ (c) $\cos^3 x$ (d) $\cos^4 x + 1$ (e) $\cos^4 x$

Tangente de un Arco Trigonométrico

- 44] 32. Calcule:
(a) $\operatorname{tg} 2\pi$ (b) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ (c) $\operatorname{tg} 3\pi$ (d) $\operatorname{tg}(-\pi)$
- 45] 33. Clasifique como Verdadera (V) o Falsa (F) cada una de las siguientes afirmaciones:
(a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}, \operatorname{tg} \frac{4\pi}{2} > 0$ (b) $\frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{9}}{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}} > 0$ (c) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{18} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15} < 0$
- 46] 34. Sabiendo que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule $\operatorname{tg} \alpha$.
- 48] 35. ¿Cuales son los valores de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?
- 49] 36. Una recta r pasa por el centro de una circunferencia cuyo radio mide 2 cm. La circunferencia tangencia a la recta s en Q , conforme muestra la figura.
La medida α del ángulo formado por r y s es tal que $\cos \alpha = \frac{15}{17}$. Calcule la medida del segmento \overline{PQ} .



51 37. Consultando la Tabla Trigonométrica de arcos notables, calcule:

$$\begin{array}{llll} \text{(a) } \operatorname{tg} 120^\circ & \text{(d) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} & \text{(f) } \operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} & \text{(h) } \operatorname{tg} \frac{17\pi}{6} \\ \text{(b) } \operatorname{tg} 135^\circ & \text{(e) } \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} & \text{(g) } \operatorname{tg} \frac{20\pi}{3} & \\ \text{(c) } \operatorname{tg} 210^\circ & & & \end{array}$$

52 38. Calcule el valor de la expresión:

$$E = \operatorname{tg}^2 \frac{25\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{51\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{45\pi}{4}$$

53 39. Simplifique las expresiones:

$$\text{(a) } E = \frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(-\alpha)}, \text{ en que } \operatorname{tg} \alpha \neq 0$$

$$\text{(b) } E = \frac{\operatorname{tg}(180^\circ + x) + \operatorname{tg}(180^\circ - x) + \operatorname{tg}(360^\circ - x)}{\operatorname{sen}(360^\circ - x)}, \text{ con } \operatorname{sen} x \neq 0$$

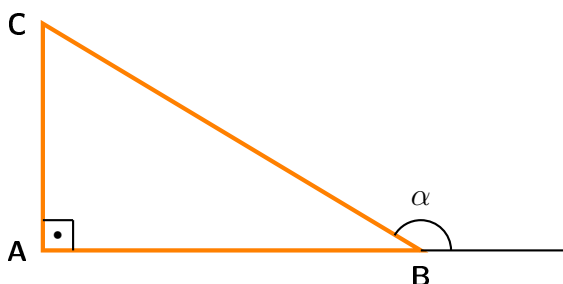
54 40. En el paralelogramo representado abajo, se sabe que $\operatorname{tg} \alpha = -2,6$.



Calcule:

- (a) $\operatorname{tg} \beta$
- (b) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$
- (c) $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta)$

- 55 41. Calcule la medida del cateto \overline{AB} del triángulo rectángulo ABC , a seguir sabiendo que $AC = 10$ cm y que $\text{tg } \alpha = -\frac{5}{6}$.



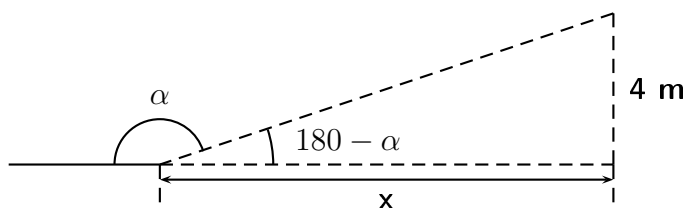
- 56 42. Calcule:

(a) $\text{tg}(-45^\circ)$

(b) $\text{tg}(-120^\circ)$

(c) $\text{tg}(-300^\circ)$

- 57 43. En un centro comercial, una rampa plana y recta une dos pisos horizontales y forma un ángulo obtuso de medidas α con el piso inferior, tal que $\text{tg } \alpha = -\frac{2}{5}$.



Una persona que recorre toda esa rampa se desplaza verticalmente 4 m. ¿Cual es el desplazamiento horizontal de esa persona?.

Ecuaciones Trigonómicas

- 58 44. Resuelva las siguientes ecuaciones para $0 \leq x < 2\pi$.

(a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\text{cos } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(d) $\text{cos } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $\text{cos } x = \frac{1}{2}$

(f) $\sin x = -\frac{1}{2}$

(g) $\sin x = -1$

(h) $\cos x = 1$

(i) $\sin x = 0$

(j) $\sin x = 3$

(k) $\cos x = -2$

(l) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

(m) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(n) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

(ñ) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

59 45. Resuelva en \mathbb{R} las ecuaciones de los ítems a, e, i, m y n del ejercicio anterior.

61 46. Resuelva la ecuación $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ para $0^\circ \leq x < 720^\circ$.

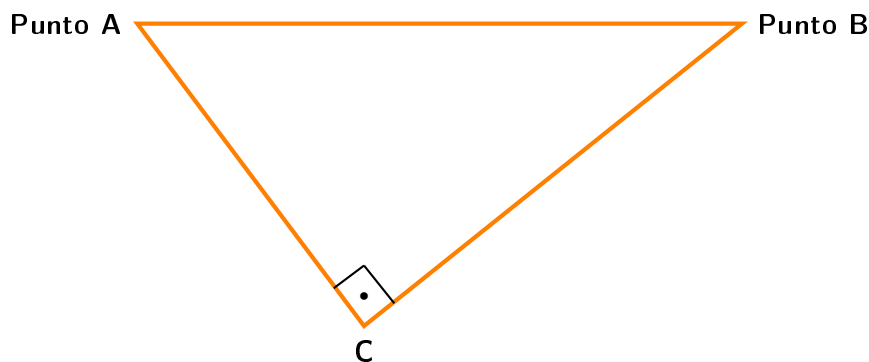
64 47. Resuelva las ecuaciones abajo para $0 \leq x < 2\pi$.

(a) $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$

(b) $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$

(c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$

67 48. Un túnel de 300 m de longitud será construido en línea recta, uniendo dos puntos: A y B , de la base de una montaña. Un equipo de trabajadores hará una perforación a partir de A y otro equipo a partir de B . Para determinar la dirección de las perforaciones de forma tal que los dos trechos se encuentren, un ingeniero fijó un punto C en el terreno próximo a la montaña, de modo que el ángulo $\hat{A}CB$ fuese recto y $AC = 150\text{m}$.
¿Cuál debe ser la medida del ángulo que la dirección de los dos trechos de perforación debe formar con el lado \overline{AC} del triángulo ABC para que no haya un desencuentro de los dos trechos?.



69 49. Resuelva las ecuaciones para $0 \leq x < 2\pi$:

(a) $(2 \sin x - \sqrt{3})(2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$

(b) $2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin x = 0$

(c) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

(d) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0$

72] 50. Resuelva las ecuaciones siguientes en el dominio $U = [0, 2\pi[$.

(a) $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

(c) $4\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x + 3\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3$

(b) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

Inecuaciones Trigonométricas

74] 51. Resuelva las inecuaciones para $0 \leq x < 2\pi$.

(a) $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

(j) $\operatorname{sen} x \leq -\frac{1}{2}$

(b) $\operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(k) $\cos x > -\frac{1}{2}$

(c) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

(l) $\operatorname{sen} x > 1$

(d) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

(m) $\cos x < 1$

(e) $\cos x \leq 0$

(n) $\operatorname{sen} x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(f) $\operatorname{sen} x < 0$

(ñ) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

(g) $\cos x > 0$

(o) $\operatorname{tg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(h) $\operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$

(p) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$

(i) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

77] 52. Resuelva los sistemas de inecuaciones siguientes para $0 \leq x < 2\pi$.

(a)
$$\begin{cases} \cos x < \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1 \\ \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \geq 1 \\ \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

78] 53. Resuelva en \mathbb{R} los sistemas de los ítems a y d del ejercicio anterior.

79] 54. Resuelva las inecuaciones para $0 \leq x < 2\pi$.

(a) $0 < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

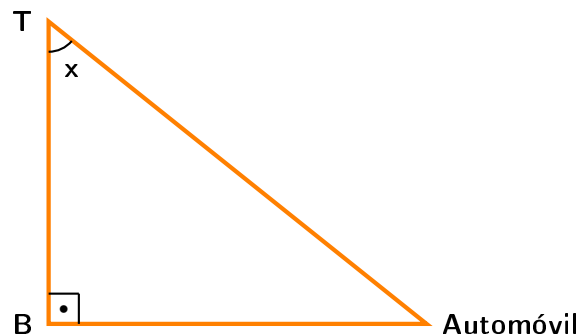
(c) $|\operatorname{sen} x| < \frac{1}{2}$

(d) $1 < \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$

(e) $0 \leq \operatorname{tg} x < 1$

(f) $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x \leq 1$

81] 55. Desde un punto T , a 15 m de altura en relación al plano horizontal de una carretera, un patrullero de caminos observa un automóvil sobre un ángulo de medida x , en grados, en relación a la vertical \overrightarrow{TB} , siendo B un punto del plano de la carretera. Determine las posibles medidas de x para que la distancia entre el automóvil y el punto B sea mayor que $5\sqrt{3}$ m.



82] 56. Considerando el dominio $U = [0, 2\pi[$, obtenga el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

(a) $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x < 0$

(b) $2 \operatorname{sen}^2 x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x \geq 0$

(c) $2 \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos x - 4 > 0$

(d) $2 \cos^2 x + 5 \operatorname{sen} x - 8 < 0$

(e) $(2 \cos x - 1)(2 \cos x - \sqrt{2}) < 0$

$$(f) \frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{2 \operatorname{sen} x - \sqrt{2}} < 0$$

$$(g) \frac{2 \cos x - 1}{2 \cos x + 1} > 0$$

$$(h) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x > 0$$

$$(i) (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\operatorname{tg}^2 x - 1) \leq 0$$

$$(j) \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} > 0$$