Cálculo A: Aplicaciones de la Derivada

MarioProfe

25 de junio de 2025

Los números encerrados en cuadritos corresponden al número del Ejercicio que aparece en la hoja de respuestas suministrada

Tasa de Variación

Ejercicios 5.3

$\boxed{01}$ 1. En una granja experimental, se constató que una ave en crecimiento pesa en gramos:

$$W(t) = \begin{cases} 20 + \dfrac{1}{2}(t+4)^2. & 0 \leqslant t \leqslant 60 \\ 24,4t + 604 & 60 \leqslant t \leqslant 90 \end{cases}$$

Donde t es medido en días.

(a) ¿Cual es la razón de aumento del peso del ave cuando $t = 50$?

(b) ¿Cuanto el ave aumentará en el 51° día?

(c) ¿Cual es la razón de aumento del peso cuando $t = 80$?

$\boxed{02}$ 2. Una pedazo de carne fue colocada en un refrigerador (freezer) en el instante $t = 0$. Después de t horas, su temperatura en grados centígrados, está dada por:

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 5.$$

¿Cual es la velocidad de reducción de su temperatura después de 2 horas?

$\boxed{04}$ 3. Una piscina está siendo drenada para limpieza. Si su volumen de agua inicial era de 90.000 litros y después de un tiempo de t horas este volumen disminuyó 2.500 t^2, determinar:

(a) Tiempo necesario para el vaciamiento de la piscina;

(b) Tasa media de drenaje en el intervalo [2,5];

(c) Tasa media de drenaje después de 2 horas del inicio del proceso.

$\boxed{05}$ 4. Un apartamento está alquilado por US $ 4.500,00. Este alquiler sufrirá un reajuste anual de US $ 1.550,00.

(a) Exprese la función con la cual podemos calcular la tasa de variación del alquiler, en t años.

(b) Calcule la tasa de variación del alquiler después de 4 años.

(c) ¿Cual es el porcentaje de variación del alquiler después de 1 año del primer reajuste?

(d) ¿Que sucederá al porcentaje de variación después de algunos años?

06 5. En una pequeña comunidad se obtuvo una proyección que de aquí a t años la población será de $p(t) = 20 - \dfrac{5}{t+1}$ millares.

(a) De aquí a 18 meses ¿Cual será la tasa de variación de la población de esta comunidad?

(b) ¿Cual será la variación real experimentada el 18° mes?

07 6. Sea r la raíz cubica de un número real x. Encuentre la tasa de variación de r en relación a x cuando x fuese igual a 8.

08 7. Un líquido gotea en un recipiente. Después de t horas, hay $5t - t^{\frac{1}{2}}$ litros en el recipiente.¿Cual es la tasa de goteo del líquido en el recipiente, en $l/hora$, cuando $t = 16$ horas?

09 8. Un tanque tiene la forma de un cilindro circular recto de 5 m de radio de base y 10 m de altura. En el tiempo $t = 0$, el agua comienza a fluir en el tanque a razón de 25 m^3/h. ¿Con que velocidad el nivel del agua sube?, ¿Cuanto tiempo llevará para que el tanque quede lleno?.

10 9. Encontrar la razón de variación del volumen v de un cubo en relación a la longitud de su diagonal. Si la diagonal se está expandiendo a una tasa de 2 m/s, ¿Cual es la razón de la variación del volumen cuando la diagonal mide 3 m?

11 10. Una planta de demolición produce polvo de piedra, que al ser depositado en el suelo forma un pila cónica donde la altura es aproximadamente igual a 4/3 del radio de la base.

(a) Determinar la razón de la variación del volumen en relación al radio de la base.

(b) Si el radio de la base varia a una tasa de 20 cm/s, ¿Cual es la razón de la variación del volumen cuando el radio mide 2 m?

12 11. Los lados de un triángulo equilátero crecen a una tasa de 2,5 cm/s.

(a) ¿Cual es la tasa de crecimiento del área de ese triángulo, cuando los lados tengan 12 cm de largo?

(b) ¿Cual es la tasa de crecimiento del perímetro, cuando los lados midan 10 cm de largo?

$\boxed{13}$ 12. Un objeto se mueve sobre la parábola $y = 2x^2 + 3x - 1$ de tal modo que su abscisa varia a la tasa de 6 unidades por minuto. ¿Cual es la tasa de variación de su ordenada, cuando el objeto este en el punto $(0, -1)$?.

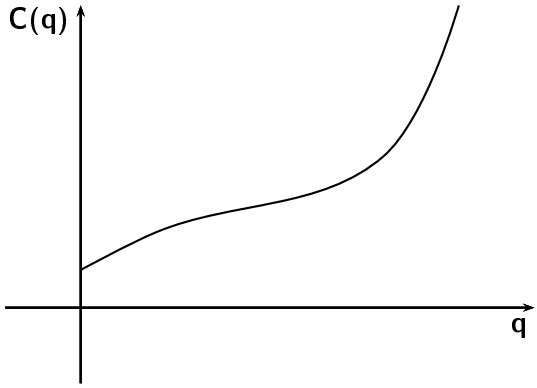
$\boxed{14}$ 13. Un tren deja una estación, en un cierto instante, y va para la dirección norte a razón de 80 Km/h. Un segundo tren deja la misma estación 2 horas después y va en la dirección este a razón de 95 km/h. Hallar la tasa con la cual se están separando los dos trenes 2 horas y 30 minutos después que el segundo tren deje la estación.

$\boxed{15}$ 14. Una lampara colocada en un poste está a 4 m de altura. Si un niño de 90 cm de altura camina alejándose de la lampara a razón de 5 m/s, ¿Con que rapidez se proyecta su sombra?

$\boxed{17}$ 15. Supongamos que el Costo Total de Producción de una cantidad de un cierto producto es dado por el gráfico de la figura a continuación:

(a) Dé el significado de $C(0)$

(b) Describa el comportamiento del Costo Marginal.



$\boxed{18}$ 16. El Costo Total $C(q)$ de la producción de q unidades de un producto está dado por:

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 5q^2 + 10q + 120$$

(a) ¿Cual es el Costo Fijo?

(b) ¿Cual es el Costo Marginal cuando el nivel de producción es $q = 20$ unidades?

(c) Determinar si existen los valores de q tal que el Costo Marginal sea nulo?

$\boxed{19}$ 17. La función $q = 20000 - 400p$ representa la demanda de un producto en relación a su precio p. Calcular e interpretar el valor de la elasticidad de la demanda al nivel de precio $p = 4$.

Análisis General del Comportamiento de una Función

Ejercicios 5.10

$\boxed{05}$ 18. Determinar los puntos críticos de las siguientes funciones si existieren.

(a) $y = 3x + 4$

(b) $y = x^2 - 3x + 8$

(c) $y = 2 + 2x - x^2$

(d) $y = (x - 2)(x + 4)$

(e) $y = 3 - x^3$

(f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

(g) $y = x^4 + 4x^3$

(h) $y = \operatorname{sen} x$

(i) $y = \cos x$

(j) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$

(k) $y = e^x - x$

(l) $y = (x^2 - 9)^{2/3}$

(m) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

(n) $y = |2x - 3|$

(ñ) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$

$\boxed{06}$ 19. Determinar, algebraicamente, los intervalos en los cuales las funciones son crecientes o decrecientes. Realizar un esbozo del gráfico, comparando los resultados.

(a) $f(x) = 2x - 1$

(b) $f(x) = 3 - 5x$

(c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 7$

(d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$

(e) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x$

(g) $f(x) = 2^x$

(h) $f(x) = e^{-x}$

(i) $f(x)xe^{-x}$

(j) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

(k) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

$\boxed{09}$ 20. Encontrar los puntos de máximo y mínimo relativos de las siguientes funciones, si existieren. Realizar un esbozo del gráfico y comparar los resultados.

(a) $f(x) = 7x^2 - 6x + 3$

(b) $g(x) = 4x - x^2$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 9$

(d) $h(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 8$

(e) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0 \\ 3t^2, & t \geqslant 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = 6x^{2/3} - 2x$

(g) $f(x) = 5 + (x-2)^{7/5}$

(h) $f(x) = 3 + (2x+3)^{4/3}$

(i) $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

(j) $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$

(k) $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$

(l) $f(x) = x^2\sqrt{16-x}$.

$\boxed{11}$ 21. Determinar los coeficientes a y b de forma que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto (-2,1).

$\boxed{14}$ 22. Determinar los puntos de inflexión y reconocer los intervalos donde las funciones siguientes tienen concavidad hacia arriba o hacia abajo.

(a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$

(b) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x + 9$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$

(d) $f(x) = 2xe^{-3x}$

(e) $f(x) = x^2e^x$

(g) $f(t) = \dfrac{t^2+9}{(t-3)^2}$

(h) $f(t) = e^{-t}\cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 1 \\ x, & x \geqslant 1 \end{cases}$

(j) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leqslant 2 \\ 4 - x^2, & x > 2 \end{cases}$

Problemas de Máximos y Mínimos

Ejercicios 5.12

01 23. Un cable de longitud l es cortado en dos pedazos. Con un pedazo se hará un círculo y con el otro, un cuadrado.

(a) ¿Como debemos cortar el cable con el fin de que la suma de las dos áreas comprendidas por las figuras mencionadas sea mínima?

(b) ¿Como debemos cortar el cable a fin de que la suma de las áreas comprendidas sea máxima?

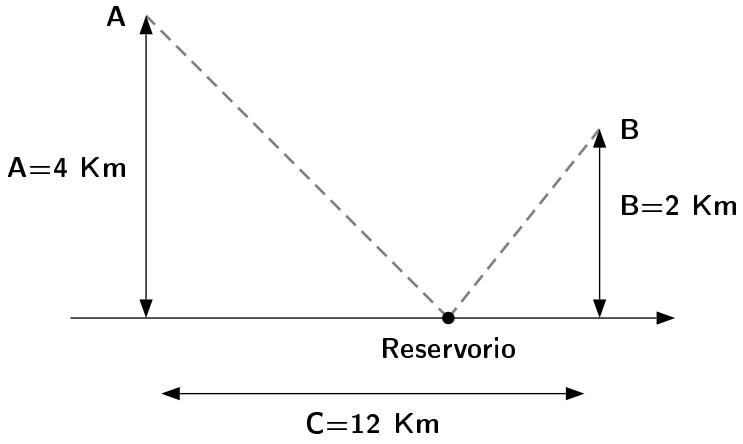
02 24. Determinar el punto P situado sobre el gráfico de la hipérbole $xy = 1$, que está más próxima del origen.

04 25. Hallar dos números positivos cuya suma sea 70 y cuyo producto sea el mayor posible.

05 26. Usando una hoja cuadrada de cartulina, de lado a, se desea construir una caja sin tapa, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determinar el lado de los cuadrados que deben ser cortados de modo que el volumen de la caja sea el mayor posible.

06 27. Determinar las dimensiones de una lata cilíndrica, con tapa, con volumen V, de forma que su área total sea mínima.

07 28. Dos industrias A y B necesitan de agua potable. La figura abajo l, esquematiza la posición de las industrias así como la posición de una tubería l ya existente. ¿En que punto de la tubería debe ser instalado un reservorio de agua de modo que el metraje de tubería a ser utilizado sea mínimo?



08 29. El Costo y el Ingreso Total (R) con la producción y comercialización de un producto son dados por:
$C(q) = 600 + 2,2q$
$R(q) = 10q - 0,006q^2$
siendo $0 \leqslant q \leqslant 900$.

(a) Encontrar la cantidad q que maximiza la ganancia con la venta de ese producto.

(b) ¿Cual es el nivel de producción que minimiza la ganancia?

(c) ¿Cual es el nivel de producción correspondiente a la perdida máxima?

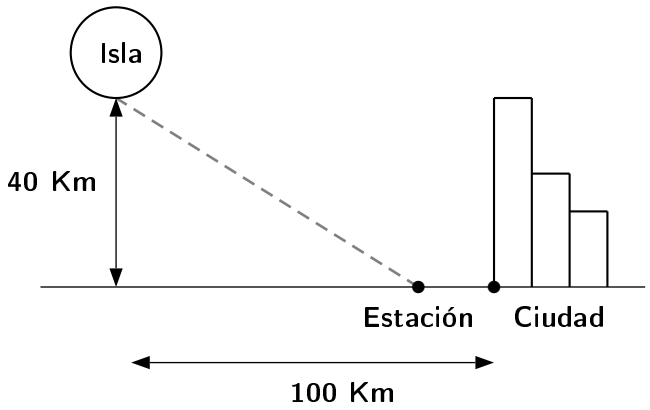
$\boxed{10}$ 30. ¿Cual es el rectángulo de perímetro máximo inscrito en el círculo de radio 12 cm?

$\boxed{12}$ 31. Mostrar que el volumen del mayor cilindro recto que puede ser inscrito en un cono recto es 4/9 del volumen del cono.

$\boxed{14}$ 32. Determinar el punto A de la curva $y = x^2 + x$ que se encuentra más próximo de (7,0). Mostrar que la recta que pasa por (7,0) y por A es normal a la curva dada en A.

$\boxed{17}$ 33. Un cañón, situado en el suelo, es colocado sobre un ángulo de inclinación α. Sea l el alcance del cañón, dado por $l = \dfrac{2v^2}{g} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$, donde v y g son constantes. ¿Para que ángulo el alcance es máximo?.

$\boxed{18}$ 34. Una agencia de turismo está organizando un servicio de barcas, de una isla situada a 40 Km de una costa cuasi recta, para una ciudad que dista 100 Km, como muestra la figura abajo. Si la barca tiene una velocidad de 18 Km por hora y los carros tienen una velocidad media de 50 Km/h, ¿Donde deberá estar situada la estación de las barcas a fin de tornar el viaje lo más rápido posible?



$\boxed{19}$ 35. Una cerca de 1 m de altura está situada a una distancia de 1 m de la pared lateral de un galpón. ¿Cual debe ser la longitud de la menor escalera cuyas extremidades se apoyan en el pared y en el piso del lado de afuera de la cerca?.

$\boxed{20}$ 36. Sea s una recta que pasa por el punto (4,3) formando un triángulo con los ejes coordenados positivos. ¿Cual es la ecuación s para que el área de ese triángulo sea mínima?.

$\boxed{21}$ 37. Una pista de atletismo con longitud total de 400 m consiste de 2 semicírculos y dos segmentos rectos, conforme la figura abajo. Determinar las dimensiones de la pista, de tal forma que el área rectangular, demarcada en la figura, sea máxima.

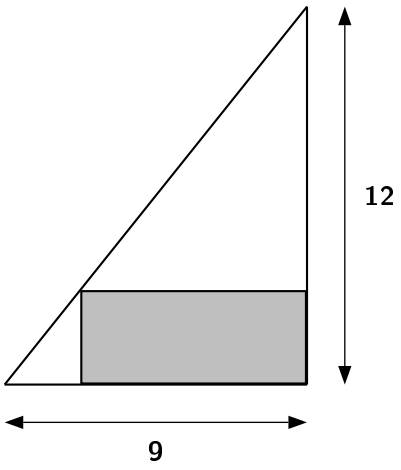
22 38. Un cilindro circular recto está inscrito en un cono circular recto de altura $H = 6m$ y radio de la base $R = 3,5m$. Determinar la altura y el radio de la base del cilindro de volumen máximo.

23 39. Una fábrica produce x millares de unidades mensuales de un determinado artículo. Si el costo de producción es dado por $C = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$ y el valor obtenido en la venta es dado por $R = 60x - 12x^2$, determinar el número optimo de unidades mensuales que maximiza la ganancia $L = R - C$.

24 40. Un cilindro recto está inscrito en una esfera de radio R. Determinar ese cilindro, de forma que su volumen sea máximo.

26 41. Un fabricante, al comprar cajas de embalaje rectangulares exige que la longitud de cada caja sea 2 m y el volumen 3 m^3. Para gastar la menor cantidad de material posible en la fabricación de cajas, ¿Cuales deben ser sus dimensiones?.

27 42. Un rectángulo está inscrito en un triángulo rectángulo de catetos que mide 9 cm y 12 cm. Encontrar las dimensiones del rectángulo con mayor área, suponiendo que su posición es dada en la figura a seguir.



Regla de L'Hopital

Ejercicios 5.14

Determinar los siguientes límites con el auxilio de las reglas de L'Hopital.

1 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+6x}{x^3+7x^2+5x}$

5 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6-2x+3x^2-x^3}{x^4-3x^3-x+3}$

7 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-6x+7}{x^3+7x-1}$

9 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x^5-6}{4x^2-2x+4}$

11 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

13 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-\cos x}$

15 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{(x-\pi/2)^2}$

17 $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{2x-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

19 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

21 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{sen} x}$

23 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$

25 $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{cotg} x$

29 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

31 $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

35 $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x-1)^{\frac{2}{x}}$

37 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} ax)}{\ln(\operatorname{sen} x)}$

39 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

41 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{tg} x)\sec 2x$

43 $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$