Cálculo A: Derivada

MarioProfe

24 de junio de 2025

Los números encerrados en cuadritos corresponden al número del Ejercicio que aparece en la hoja de respuestas suministrada

Derivada de una Función

Ejercicios 4.7

$\boxed{01}$ 1. Determinar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas, en los puntos indicados. Esbozar el gráfico en cada caso.

(a) $f(x) = x^2 - 1;\ x = 1,\ x = a,\ a \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x^2 - 3x + 6;\ x = -1,\ x = 2$.

(c) $f(x) = x(3x - 5);\ x = \dfrac{1}{2},\ x = a,\ a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{02}$ 2. En cada uno de los casos del itens del ejercicio (1), determine la ecuación de la recta normal a la curva, en los puntos indicados. Esbozar el gráfico, en cada caso.

$\boxed{03}$ 3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1 - x^2$, que sea paralela a la recta $y = 1 - x$. Esbozar los gráficos de la función, de la recta dada y de la recta tangente encontrada.

$\boxed{04}$ 4. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 2x + 1$ en el punto $(-2, 9)$.

$\boxed{05}$ 5. Un cuerpo se mueve en línea recta de modo que su posición en el instante t está dada por $f(t) = 16t + t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 8$, donde el tiempo es dado en segundos y la distancia en metros.

(a) Hallar la velocidad media durante el intervalo de tiempo $[b, b + h]$, $0 \leqslant b < 8$.

(b) Hallar la velocidad media durante los intervalos $[3; 3,1]$, $[3; 3,01]$ y $[3; 3,001]$.

(c) Determinar la velocidad del cuerpo en un instante cualquiera t.

(d) Hallar la velocidad del cuerpo en el instante $t = 3$.

(e) Determinar la aceleración en el instante t.

$\boxed{06}$ 6. Influencias externas producen una aceleración en una partícula de tal forma que la ecuación de su movimiento rectilíneo es $y = \dfrac{b}{t} + ct$, donde y es el desplazamiento de t (tiempo).

(a) ¿Cual es la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$?

(b) ¿Cual es la ecuación de la aceleración?

$\boxed{07}$ 7. Dada las funciones $f(x) = 5 - 2x$ y $g(x) = 3x^2 - 1$, determinar:

(a) $f'(1) + g'(1)$.

(c) $f(2) - f'(2)$.

(e) $f\left(\dfrac{5}{2}\right) - \dfrac{f'(5/2)}{g'(5/2)}$.

$\boxed{08}$ 8. Usando la definición, determinar la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 1 - 4x^2$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

$\boxed{12}$ 9. Dada la función $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, determinar los intervalos en que:

(a) $f'(x) > 0$. (b) $f'(x) < 0$.

$\boxed{13}$ 10. Simular gráficamente diferentes rectas tangentes a la curva $y = x^2$. Suponiendo que existen dos rectas tangentes que pasan por el punto $P(0, -4)$, encontrar el punto de tangencia y las ecuaciones de las rectas.

Derivadas Laterales

Ejercicios 4.10

En los ejercicios del 1 al 4 calcular las derivadas laterales en los puntos donde la función no es derivable. Esbozar el gráfico.

01 11. $f(x) = 2|x-3|$

02 12. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 1 \\ 2x-1, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

03 13. $f(x) = |2x+4| + 3$

04 14. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| > 1 \\ 0, & |x| \leqslant 1 \end{cases}$

Reglas de Derivación

Ejercicios 4.12

En los ejercicios del 1 al 21 encontrar la derivada de las funciones dadas.

01 15. $f(r) = \pi r^2$

03 16. $f(w) = aw^2 + b$

05 17. $f(x) = (2x+1)(3x^2+6)$

07 18. $f(x) = (3x^5-1)(2-x^4)$

09 19. $f(x) = (x-1)(x+1)$

11 20. $f(x) = 7(ax^2+bx+c)$

13 21. $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$

15 22. $f(t) = \dfrac{3t^2+5t-1}{t-1}$

17 23. $f(x) = \dfrac{4-x}{5-x^2}$

19 24. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}(3x^2+6x)$

21 25. $f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{5}{x^5}$

$\boxed{24}$ 26. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + Ax$ y $g(x) = Bx$, determinar A y B de tal forma que

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 1 + 2x \\ f(x) - g(x) = x^2 \end{cases}$$

$\boxed{25}$ 27. Dada la función $f(t) = 3t^2 - 4t + 1$, encontrar $f(0) - tf'(0)$.

$\boxed{26}$ 28. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{2x+1}{3x-4}$ en el punto de abscisa $x = -1$. Usando una herramienta gráfica, esbozar el gráfico de la función y de la recta tangente.

$\boxed{27}$ 29. Encontrar la ecuación de la recta normal a la curva $y = (3x^2 - 4x)^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$\boxed{28}$ 30. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $y = x$. Usando una herramienta gráfica, esbozar el gráfico de la curva, la recta dada y de las tangentes encontradas.

$\boxed{29}$ 31. En que puntos el gráfico de la función $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$ tiene tangente horizontal? Esbozar el gráfico y analizar el resultado obtenido.

Derivación de Funciones Elementales

Ejercicios 4.16

$\boxed{01}$ 32. Determinar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas, en los puntos indicados. Esbozar el gráfico en cada caso.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x};\ x = \dfrac{1}{3},\ x = 3.$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-a},\ a \in \mathbb{R} - \{-2, 4\};\ x = -2, x = 4.$

(c) $f(x) = 2\sqrt{x};\ x = 0,\ x = 3,\ x = a,\ a > 0.$

$\boxed{02}$ 33. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 1$, que sea perpendicular a la recta $y = -x$.

$\boxed{03}$ 34. La posición de una partícula que se mueve en el eje de las x depende del tiempo de acuerdo a la ecuación $x = 3t^2 - t^3$, en que x viene expresado en metros y t, en segundos.

(a) ¿Cual es su desplazamiento después de los primeros 4 segundos?

(b) ¿Cual es la velocidad de la partícula al terminar cada uno de los 4 primeros segundos?

(c) ¿Cual es la aceleración de la partícula en cada uno de los 4 primeros segundos?

35. En los ejercicios del 5 al 41 calcular la derivada correspondiente.

(05) $f(x) = 10(3x^2 + 7x - 3)^{10}$

(07) $f(t) = (7t^2 + 6t)^7(3t - 1)^4$

(09) $f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 6x - 2)^2}$

(11) $f(t) = \sqrt{\dfrac{2t+1}{t-1}}$

(13) $f(x) = 2^{3x^2+6x}$

(15) $f(t) = e^{\frac{t}{2}}(t^2 + 5t)$

(17) $f(s) = \log_3 \sqrt{s+1}$

(19) $f(x) = \dfrac{a^{3x}}{b^{3x^2-6x}}$

(22) $f(u) = \cos(\pi/2 - u)$

(24) $f(x) = \operatorname{sen}^3(3x^2 + 6x)$

(25) $f(x) = 3\operatorname{tg}(2x + 1) + \sqrt{x}$

(27) $f(x) = e^{2x}\cos 3x$

(29) $f(x) = a\sqrt{\cos bx}$

(31) $f(\theta) = a^{\cot\theta},\ a > 0$

(33) $f(t) = t \arccos 3t$

(35) $f(x) = t \operatorname{arcsec} \sqrt{x}$

(37) $f(x) = \dfrac{\ln(\operatorname{sen} hx)}{x}$

(39) $f(x) = \left[\operatorname{csch} \dfrac{(3x+1)}{x}\right]^3$

(41) $f(x) = x \operatorname{arg\,coth} x^2$

36. En los ejercicios 43 al 79, calcular la derivada.

(43) $f(x) = \dfrac{1}{2}(2x^5 + 6x^{-3})^5$

(45) $f(x) = (5x - 2)^6(3x - 1)^3$

(47) $f(t) = (4t^2 - 5t + 2)^{-\frac{1}{3}}$

(49) $f(x) = 2e^{3x^2+6x+7}$

(51) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\ln 2x}$

(53) $f(t) = \dfrac{\sqrt{e^t - 1}}{\sqrt{e^t + 1}}$

(55) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(7x^2 - 4)$

(57) $f(t) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}$

(59) $f(x) = \operatorname{sen}(2x + 4)$

(61) $f(x) = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

(63) $f(s) = \operatorname{cotg}^4(2s - 3)^2$

(65) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x + 1)}{e^x}$

(67) $f(t) = \ln \cos^2 t$

(69) $f(t) = e^{2\cos 2t}$

(71) $f(s) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} s/2}{s + 1}$

(73) $f(x) = \operatorname{senh}(2x - 1)$

(75) $f(t) = \operatorname{tgh}(4t^2 - 3)^2$

(77) $f(x) = (\operatorname{arg\,senh} x)^2$

(79) $f(x) = (x + 1)\operatorname{arg\,sech} 2x$

$\boxed{81}$ 37. Calcular $f'(0)$, si $f(x) = e^{-x}\cos 3x$.

$\boxed{83}$ 38. Dada $f(x) = e^{-x}$, calcular $f(0) + x\,f'(0)$.

$\boxed{89}$ 39. Mostrar que la función $y = xe^{-x^2/2}$ satisface la ecuación $xy' = (1 - x^2)y$.

$\boxed{90}$ 40. Mostrar que la función $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x}$ satisface la ecuación $xy' = y(y\ln x - 1)$.

Derivadas Sucesivas y Derivación Implícita

Ejercicios 4.21

En los ejercicios 1 al 11 calcular las derivadas sucesivas hasta la orden n indicada.

$\boxed{01}$ 41. $y = 3x^4 - 2x;\ \ n = 5$

$\boxed{03}$ 42. $y = 3 - 2x^2 + 4x^5;\ \ n = 10$

$\boxed{05}$ 43. $y = \dfrac{1}{x-1};\ \ n = 4$

$\boxed{07}$ 44. $y = \dfrac{1}{e^x};\ \ n = 4$

$\boxed{09}$ 45. $y = \operatorname{sen} ax;\ \ n = 7$

$\boxed{11}$ 46. $y = \operatorname{tg} x;\ \ n = 3$

$\boxed{18}$ 47. Calcular $y' = \dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones definidas implícitamente.

(a) $x^3 + y^3 = a^3$

(b) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

(d) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$

(e) $a\cos^2(x+y) = b$

(f) $\operatorname{tg} y = xy$

(g) $e^y = x + y$.

$\boxed{19}$ 48. Determinar las rectas tangente y la normal a la circunferencia de centro $(2, 0)$ y radio 2, en los puntos de abscisa 1.

$\boxed{22}$ 49. Mostrar que las curvas cuyas ecuaciones son $2x^2 + 3y^2 = 5$ y $y^2 = x^3$ se interceptan en el punto $(1, 1)$ y que sus tangentes en ese punto son perpendiculares.

$\boxed{23}$ 50. Calcular la derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones definidas en la forma paramétrica. ¿Para cuales valores de t, y' está definida?

(a) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3,\ t \in (0, +\infty) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \operatorname{sen} 2t,\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t,\ t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 + 5,\ -\infty < t < +\infty \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\operatorname{sen}^3 t,\ t \in [0, \pi] \end{cases}$

$\boxed{24}$ 51. Determinar la ecuación de la recta tangente a la elipse:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\, t,\ \ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

En el punto $P\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{26}$ 52. Encontrar $\Delta y - dy$ de las siguientes funciones:

(a) $y = 3x^2 - x + 1$ (b) $y = 2\sqrt{x}$ (c) $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$

$\boxed{27}$ 53. Encontrar Δy y dy para los valores dados:

(a) $y = \dfrac{1}{2x^2}$; $\Delta x = 0,001$; $x = 1$;

(b) $y = 5x^2 - 6x$; $\Delta x = 0,02$; $x = 0$;

(c) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$; $\Delta x = 0,1$; $x = -1$;

$\boxed{28}$ 54. Calcular un valor aproximado para las siguientes raíces, usando diferencial.

(a) $\sqrt{50}$ (b) $\sqrt[3]{63,5}$ (c) $\sqrt[4]{13}$

$\boxed{33}$ 55. Un material está siendo filtrado de un recipiente, formando un pila cónica cuya altura es siempre igual al radio de la base. Si en un instante dado el radio es 12 cm, use diferenciales para obtener la variación del radio que origina un aumento de 2 cm^3 en el volumen de la pila.

$\boxed{34}$ 56. Use diferenciales para obtener el aumento aproximado del volumen de una esfera cuando el radio varia de 3 cm a 3,1 cm.

$\boxed{35}$ 57. Un terreno tiene la forma de un cuadrado. Se estima que cada uno de sus lados mide 1.200 m, con un error máximo de 10 m. Usando diferencial, determinar el posible error en el cálculo del área del terreno.

$\boxed{36}$ 58. Un pintor es contratado para pintar ambos lados de 50 placas cuadradas de 40 cm de lado. Después que recibió las placas verificó que los lados de las placas tenían $1/2$ cm más. Usando diferencial, encontrar el aumento aproximado del porcentaje de tinta a ser usada.