

Cálculo A: Límite y Continuidad

MarioProfe

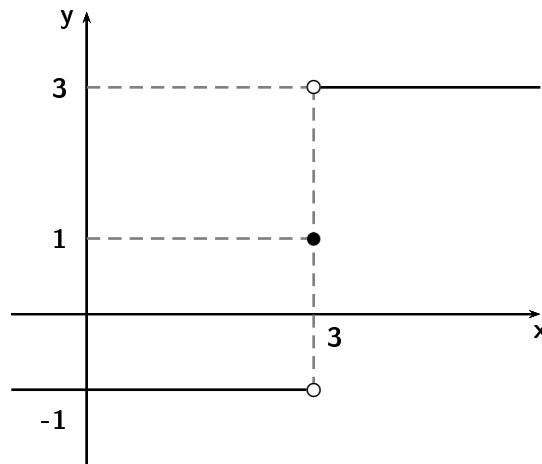
24 de junio de 2025

Los números encerrados en cuadritos corresponden al número del Ejercicio que aparece en la hoja de respuestas suministrada

Definición y Propiedades de los Límites

Ejercicios 3.6

- 01 1. Sea $f(x)$ la función definida por el gráfico:



Encuentre si existe:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

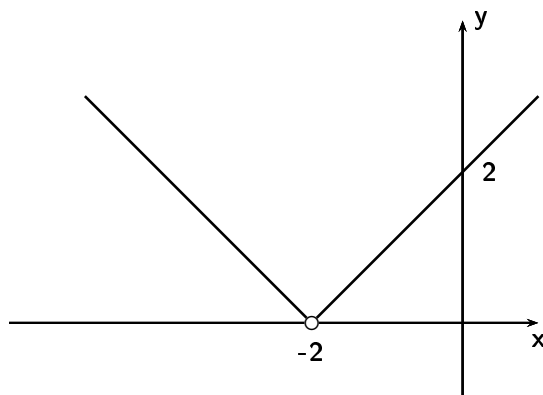
(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

- 02 2. Sea $f(x)$ la función definida por el gráfico:



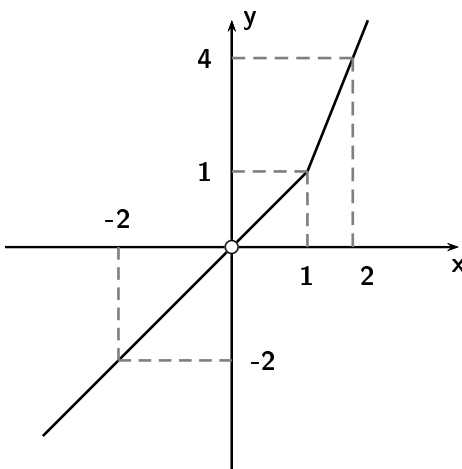
(a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 03 3. Sea $f(x)$ la función definida por el gráfico:



Encuentre si existe:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

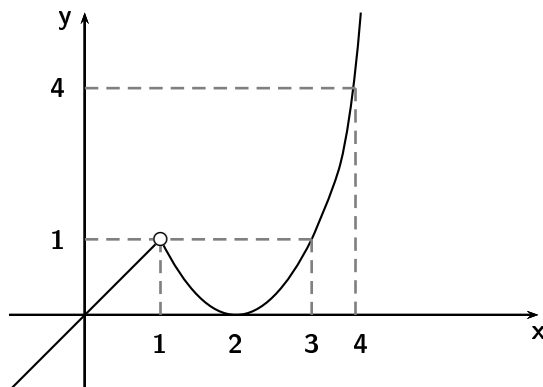
(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

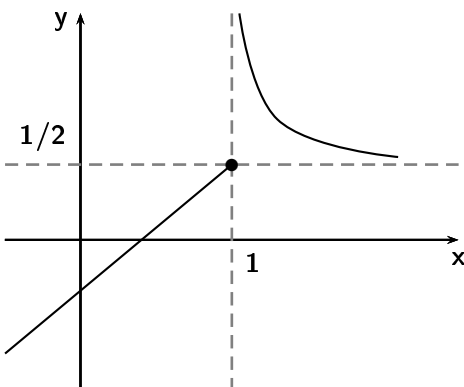
- 04 4. Sea $f(x)$ la función definida por el gráfico:



Encuentre si existe:

- | | | |
|-------------------------------------|---|-----------------------------------|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | |

- 05 5. Sea $f(x)$ la función definida por el gráfico:



Encuentre si existe:

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | |

En los ejercicios del 11 al 15 es dado $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Determinar un número δ para un ϵ dado tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Dar ejemplos de otros dos números positivos para δ , que también satisfacen la implicación dada.

$$\boxed{11} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 4) = 8, \quad \epsilon = 0,01$$

$$\boxed{12} \quad 7. \lim_{x \rightarrow -1} (-3x + 7) = 10, \quad \epsilon = 0,5$$

$$\boxed{13} \quad 8. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4, \quad \epsilon = 0,1$$

$$\boxed{15} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, \quad \epsilon = 0,75$$

Calcular los límites en los ejercicios 18 al 37 usando las propiedades de los Límites:

$$18 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (3 - 7x - 5x^2).$$

$$28 \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 2}.$$

$$19 \quad \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 - 7x + 2).$$

$$29 \quad \lim_{s \rightarrow 1/2} \frac{s + 4}{2s}.$$

$$20 \quad \lim_{x \rightarrow -1} (-x^5 + 6x^4 + 2).$$

$$30 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{2x + 3}.$$

$$21 \quad \lim_{x \rightarrow 1/2} (2x + 7).$$

$$31 \quad \lim_{x \rightarrow 7} (3x + 2)^{2/3}.$$

$$22 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} [(x + 4)^3 \cdot (x + 2)^{-1}].$$

$$32 \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2x^2 - x}{3x}.$$

$$23 \quad \lim_{x \rightarrow 0} [(x - 2)^{10} \cdot (x + 4)].$$

$$33 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{2}}{3x - 4}.$$

$$24 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 4}{3x - 1}.$$

$$34 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} [2 \sin x - \cos x + \cotg x].$$

$$25 \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t + 3}{t + 2}.$$

$$35 \quad \lim_{x \rightarrow 4} (e^x + 4x).$$

$$26 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

$$36 \quad \lim_{x \rightarrow 1/3} (2x + 3)^{1/4}.$$

$$27 \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 5t + 6}{t + 2}.$$

$$37 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sinh x}{4}.$$

Límites Laterales

Ejercicios 3.8

[01] 10. Sea $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ 3x - 7, & x > 3. \end{cases}$

Calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

Esbozar el gráfico de $f(x)$.

[02] 11. Sea $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3. \end{cases}$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$. Esboce el gráfico de $h(x)$.

[03] 12. Sea $F(x) = |x - 4|$. Calcule los límites indicados si existen:

(a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} F(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} F(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} F(x)$

Esboce el gráfico de $F(x)$.

[04] 13. Sea $f(x) = 2 + |5x - 1|$. Calcular si existe:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1/5^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1/5^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1/5} f(x)$

Esboce el gráfico de $f(x)$.

[05] 14. Sea $g(x) = \begin{cases} \frac{|x - 3|}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 0, & x = 3. \end{cases}$

(a) Esboce el gráfico de $g(x)$.

(b) Hallar, si existen $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

[06] 15. Sea $h(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Mostrar que $h(x)$ no tiene límite en el punto 0.

09 16. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2 - x, & x > 1. \end{cases}$

Calcule los límites indicados si existen:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

10 17. Sea $f(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$.

Calcule los límites indicados si existen:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

Cálculo de Límites

Ejercicios 3.10

01 18. Para cada una de las siguientes funciones halle:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

(a) $f(x) = 3x^2$.

(c) $f(x) = 2/3x^2$.

(e) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$

(b) $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$.

(d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$.

(f) $f(x) = x^3$.

En los ejercicios 4 al 27 calcule los límites.

04 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

16 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25 + 3t} - 5}{t}$.

05 $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t+2)(t-3)}$.

17 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + bt} - a}{t}$, $a > 0$

06 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

18 $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h} - 1}{h - 1}$.

07 $\lim_{t \rightarrow 5/2} \frac{2t^2 - 3t - 5}{2t - 5}$.

19 $\lim_{h \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2(h^2 - 8)} + h}{h + 4}$.

08 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + (1-a)x - a}{x - a}$.

20 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h}$.

09 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$.

21 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{-x}$.

10 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$.

22 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}$, $a, b > 0$.

11 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

23 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}$, $a \neq 0$.

12 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

24 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

13 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

25 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$.

14 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^4 - 16}{h}$.

26 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$.

15 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(4+t)^2 - 16}{t}$.

27 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Límites en el Infinito

Ejercicios 3.13

[01] 19. Si $f(x) = \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$, calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

[02] 20. Si $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$, calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

En los Ejercicios 3 al 39 calcule los límites.

03 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + 4x^2 - 1).$

23 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 - x + 1}.$

05 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1}{t^2+1}.$

25 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-7}}{x+3}.$

07 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 2t + 3}{2t^2 + 5t - 3}.$

27 $\lim_{s \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{3s^7 - 4s^5}{2s^7 + 1}}.$

09 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}.$

29 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}.$

11 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x}.$

31 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3}.$

13 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 1}{t - 4}.$

33 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 4}.$

15 $\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v\sqrt{v} - 1}{3v - 1}.$

35 $\lim_{y \rightarrow 6^+} \frac{y+6}{y^2-36}.$

17 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$

37 $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3-x}{x^2-2x-8}.$

19 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2-1} - x).$

39 $\lim_{t \rightarrow 3^-} \frac{1}{|x-3|}.$

21 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1}.$

Límites Fundamentales y Asíntotas

Ejercicios 3.16

01 21. Determinar las asíntotas horizontales y verticales del gráfico de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{4}{x-4}$

(c) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 3x + 2}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

(g) $f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}$

(i) $f(x) = e^{1/x}$

(k) $f(x) = \ln x$

En los ejercicios 5 al 27, calcule los límites aplicando los límites fundamentales:

05 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x}$.

15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$.

06 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$.

16 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos x + \cos 2x}{x^2}$.

07 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{\sin 7x}$.

18 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + 1/\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

08 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$, $b \neq 0$.

19 $\lim_{x \rightarrow 3\pi/2} (1 + \cos x)^{1/\cos x}$.

09 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x}$.

20 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$

10 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{x+1}{4}}{(x+1)^3}$.

21 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{10^{x-2} - 1}{x - 2}$.

11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

22 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{x + 3}$.

12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

23 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^x - 25}{x - 2}$.

14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 2x}{2x + 3 \sin 4x}$

24 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{\frac{x-1}{4}} - 1}{\sin[5(x-1)]}$.

$$25 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}.$$

$$27 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}.$$

Propiedades de las Funciones Continuas

Ejercicios 3.18

01 22. Investigue la continuidad en los puntos indicados:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

$$(b) f(x) = x - |x| \quad \text{en } x = 0.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2.$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{\sin 1/x} \quad \text{en } x = 2.$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 1 \\ 1 - |x|, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1.$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2.$$

$$(h) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq -1 \\ 1 - |x|, & x < -1 \end{cases} \quad \text{en } x = -1.$$

$$(i) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 + 1} \quad \text{en } x = 2.$$

$$(j) f(x) = \frac{2}{3x^2 + x^3 - x - 3} \quad \text{en } x = -3.$$

04 23. Calcule p de modo que las funciones siguientes sean continuas:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 + px + 2, & x \neq 3 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$(b) \ f(x) = \begin{cases} x + 2p, & x \leq -1 \\ p^2, & x > -1 \end{cases}$$

$$(c) \ f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \neq 0 \\ p^3 - 7, & x = 0. \end{cases}$$

05 24. Determine, si existen, los puntos donde las siguientes funciones no son continuas:

$$(a) \ f(x) = \frac{x}{(x-3)(x+7)}$$

$$(b) \ f(x) = \sqrt{(3-x)(6-x)}$$

$$(c) \ f(x) = \frac{1}{1+2\operatorname{sen} x}$$

$$(d) \ f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 6x + 10}$$