

# Cálculo A: Funciones

MarioProfe

24 de junio de 2025

Los números encerrados en cuadritos corresponden al número del Ejercicio que aparece en la hoja de respuestas suministrada

## Definición y Operaciones con Funciones

### Ejercicios 2.10

- [1] 1. Dado  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ , hallar:
- (a)  $f(0)$  (d)  $f(x - 2)$   
(b)  $f(-2)$  (e)  $f(\frac{1}{2})$   
(c)  $f(\frac{1}{t})$  (f)  $f(t^2)$
- [3] 2. Dada la función  $f(x) = |x| - 2x$ , calcular  $f(-1)$ ,  $f(\frac{1}{2})$  y  $f(-\frac{2}{3})$ . Mostrar que  $f(|a|) = -|a|$ .
- [4] 3. Si  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  y  $d = -a$ , muestre que  $f(f(x)) = x$ .
- [6] 4. Dado  $\phi(x) = \frac{x - 1}{2x + 7}$ , forme las expresiones  $\phi\left(\frac{1}{x}\right)$  y  $\frac{1}{\phi(x)}$ .
- [7] 5. Dada la función  $f(x) = x^2 + 1$ , mostrar que, para  $a \neq 0$ ,  $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{f(a)}{a^2}$ .
- [8] 6. Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ , mostrar que  $f(1 + h) - f(1) = -\frac{h}{(1 + h)}$ .  
Calcular  $f(a + h) - f(a)$ .
- [12] 7. Sea  $f(x) = (x - 2)(8 - x)$  para  $2 \leq x \leq 8$ .
- (a) Determinar  $f(5)$ ,  $f(-\frac{1}{2})$  y  $f(\frac{1}{2})$ .  
(b) ¿Cual es el dominio de la función  $f(x)$ ?

- (c) Determinar  $f(1 - 2t)$  e indicar el dominio.  
 (d) Determinar  $f[f(3)]$  y  $f[f(5)]$ .  
 (e) Trazar el gráfico de  $f(x)$ .

**13** 8. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

(a)  $y = x^2$

(h)  $y = \frac{x + a}{x - a}$

(b)  $y = \sqrt{4 - x^2}$

(i)  $y = |x + 2| + 4, -5 \leq x \leq 2$

(c)  $y = \frac{1}{x - 4}$

(j)  $y = \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$

(d)  $y = \sqrt{x - 2}$

(k)  $y = x - \frac{1}{x}$

(e)  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

(l)  $y = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$

(f)  $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$

(g)  $y = \sqrt[3]{x + 7} - \sqrt[5]{x + 8}$

**15** 9. Construir el gráfico y determinar el dominio y el conjunto imagen de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

(c)  $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(b)  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

**18** 10. Sean  $g(x) = x - 3$  y  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, & x \neq -3 \\ k, & x = -3 \end{cases}$

Calcule  $k$  tal que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$ .

**20** 11. Sea  $h$  definida por  $h(x) = 2x - 7$ . Calcule  $h \circ h, h^2$  y  $h + h$ .

**21** 12. Sabiendo que  $f = g \circ h$ , en los ítems (a),(c) y (d) encuentre la función  $h$  en el ítem (b) la función  $g$ .

(a)  $f(x) = x^2 + 1$                        $g(x) = x + 1$

(b)  $f(x) = \sqrt{x + 2}$                        $h(x) = x + 2$

(c)  $f(x) = a + bx$                        $g(x) = x + a$

$$(d) f(x) = |x^2 - 3x + 5| \quad g(x) = |x|.$$

- 22 13. Siendo  $f(x) = ax + b$ , ¿Para cuales valores de  $a$  y  $b$  se tiene  $(f \circ f)(x) = 4x - 9$ ?
- 25 14. Determinar algebraicamente el dominio de las funciones  $f(x) = \sqrt{x-2}$ ,  $g(x) = \sqrt{x+2}$ ,  $h(x) = f(x) + g(x)$ ,  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$  y  $q(x) = (f \circ g) \cdot (x)$ .
- 27 15. Si  $f(x) = x^2$ , encuentre dos funciones  $g$  para las cuales  $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$ .
- 28 16. Si  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ , encuentre una función  $g(x)$  tal que  $(f/g)(x) = x - 1$ .
- 33 17. Un fabricante produce piezas para computadoras por el precio de US \$ 2,00 cada una. Se calcula que, si cada pieza fuese vendida por  $x$  Dolares, los consumidores comprarían, por mes,  $600 - x$  unidades. Expresar la ganancia mensual del fabricante como función del precio. Construir un gráfico para estimar el precio óptimo de venta.
- 34 18. Un grupo de amigos trabajan en el período de vacaciones vendiendo refrigerios en la playa. El alquiler del tráiler y todos los equipos necesarios para la producción son alquilados por un valor de US \$ 2.000 por mes. El costo del material de cada refrigerio es de US \$ 0,10. Expresar el costo total como una función del número de refrigerios elaborados.

## Funciones Especiales

### Ejercicios 2.17

- 5 19. La función  $f(x)$  es de 1° grado. Escriba la función si:  $f(-1) = 2$  y  $f(2) = 3$ .
- 6 20. Determinar cuales de las siguientes funciones son pares o ímpares:
- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| (a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$         | (g) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$           |
| (b) $f(x) = 5x^3 - 2x$               |  |
| (c) $f(x) = s^2 + 2s + 2$            | (h) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ |
| (d) $f(t) = t^6 - 4$                 |  |
| (e) $f(x) =  x $                     | (i) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$       |
| (f) $f(y) = \frac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ | (j) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .   |
- 7 21. Demuestre que, si  $f$  y  $g$  son funciones ímpares, entonces  $(f + g)$  y  $(f - g)$  son también funciones ímpares.
- 14 22. Mostrar que la función  $y = f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$  coincide con su inversa, esto es,  $x = f(y)$  o  $f(f(x)) = x$ .

- 20] 23. Si  $f(x) = 2^x$ , muestre que:
- $$f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2}f(x).$$
- 39] 24. Analizar la función  $f(x) = 24x - 3x^2$  y verificar la posibilidad de representar la función ingreso total. En caso afirmativo identifique la función demanda y responda:
- ¿Cual es la cantidad demandada cuando el precio unitario es US \$ 5,00?
  - ¿Cual es el precio del producto cuando el ingreso es máximo?
- 40] 25. Las funciones de demanda y de oferta de un determinado producto en el mercado son dadas por  $q_d = 15 - 4p$  y  $q_o = 6p - 1$ , respectivamente:
- Determine el precio de equilibrio
  - Represente gráficamente las funciones de demanda y oferta, mostrando el punto de equilibrio. Esboce los dos gráficos juntos.
- 41] 26. Una inmobiliaria cobra una comisión de 12% del valor de la venta de un inmueble más US \$ 25,00 fijo para los gastos de correo y divulgación. Denote por  $x$  el valor del inmueble (en US \$) y por  $f(x)$  la comisión cobrada por la inmobiliaria.
- Describa la función  $f(x)$ .
  - ¿Cual es el valor recibido por la inmobiliaria en la venta de un inmueble por US \$ 185.000?
- 42] 27. El precio de venta de un producto es de US \$ 27,00. La venta de 100 unidades genera una ganancia de US \$ 260,00. Sabiendo que el costo fijo de producción es de US \$ 540,00 y que el costo variable es proporcional al número de unidades producidas, determine:
- La función ingreso total
  - El costo variable para una producción de 2.000 unidades.
  - La producción necesaria para una ganancia de US \$ 23.460,00.
- 43] 28. Una industria comercializa cierto producto y tiene una función de Costo Total dada por  $C(x) = x^2 + 20x + 700$ , siendo  $x$  el número de unidades producidas. La función Ingreso Total es dada por  $R(x) = 200x$ . Determine:
- La Ganancia por la venta de 100 unidades.
  - ¿En que valor de  $x$  ocurrirá la ganancia máxima?
- 52] 29. Una empresa que renta vehículos  $A$  alquila un carro popular al precio de US \$ 30,00 por día más US \$ 0,20 por Kilómetro rodado. Otra empresa  $B$  alquila el mismo vehículo por US \$ 40,00 diarios más US \$ 0,10 por Kilómetro rodado. ¿Cual empresa Ud. escogería, si Ud. alquilase un carro por un día y desea pagar lo menos posible?. Justifique su respuesta algebraica y gráficamente.
- 53] 30. Entre todos los rectángulos de perímetro igual a 80 cm, ¿Cuales son las dimensiones del rectángulo de área máxima?.

- 54 31. Para medir la temperatura, son usados grados Celsius ( $C^\circ$ ) o grados Fahrenheit ( $F^\circ$ ). Ambos valores,  $0^\circ C$  y  $32^\circ F$  representan la temperatura al cual el agua se congela y ambos valores,  $100^\circ C$  y  $212^\circ F$ , representan la temperatura a la que hierve el agua. Suponga que la relación entre las temperaturas expresadas en las dos escalas puede ser representada por una recta.
- Determine la función de primer grado  $F(C)$  que dá la temperatura en  $F^\circ$ , cuando es conocida en  $C^\circ$ .
  - Esboce el gráfico de  $F$ .
  - ¿Existe alguna temperatura que tenga el mismo valor numérico en  $C^\circ$  y en  $F^\circ$ ?
- 55 32. En una ciudad la población actual es de 380.000 habitantes. Si la población presenta una tasa de crecimiento anual del 1,5 %, estime el tiempo necesario para que la población de duplique. Use un modelo de crecimiento exponencial.
- 57 33. El costo total de una plantación de soja está en función del área cultivada. Una parte del costo es aproximadamente constante (costos fijos) y responde al equipo necesario. Otra parte que responde a los costos de insumos y mano de obra y depende del área plantada (costos variables). Suponga que los costos fijos sean de US \$ 12.400,00 y los costos variables sean de US \$ 262,00 por hectárea.
- Determinar el costo total de la plantación en función del número de hectáreas plantadas.
  - Haga un esbozo del gráfico de la función costo total.
  - ¿Como podemos visualizar los costos fijos y variables en el gráfico?
- 58 34. La vida media del radio-226 (substancia radioactiva) es de 1.620 años.
- Obtener el modelo de decaimiento exponencial para esta substancia.
  - Después de 700 años, ¿Cual es el porcentual de una cantidad dada inicial de radio que todavía queda?
- 59 35. Una cierta substancia radioactiva decae exponencialmente siendo que, después de de 100 años, todavía restan 60 % de la cantidad inicial.
- Obtener el modelo de decaimiento exponencial para esta substancia.
  - Determinar su vida media.
  - Determinar el tiempo necesario para que reste solamente 15 % de una masa dada inicial.